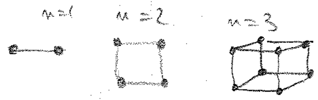
Tony

5/10/2012

<u>Définition</u> : $\Omega_n = \{-1,1\}^n$ muni de $d(x,y) = \sum |x_i - y_i|$ est le <u>cube de Hamming</u> de dim n

- C'est $\{-1,1\}^n$ vu comme partie de ℓ_1
- C'est un graphe muni de sa distance canonique : $n=1$, $n=2$, $n=3$



- On peut le construire par récurrence : $\{-1,1\}^n$ et $\{-1,1\}^n$ et on connecte les sommets correspondants

<u>Théorème</u> (Bourgain 1986) : $\exists K>0\ \forall k\geq 0\ \exists f(k)$ ℓ_1^k est K-isomorphe à un sous-espace K-complémenté de $Lip_0(\Omega_{f(k)})$

[on posera $0 = (-1,-1,\dots,-1)$]

<u>Corollaire</u> : ℓ_∞^k est K-isomorphe à un sous-espace K-complémenté de $Lip_0(\Omega_{f(k)})^*$

En particulier, $\ell_\infty^k \underset{unif}{\hookrightarrow} Lip_0(\ell_1)^*$ et le cotype de $Lip_0(\ell_1)^*$ et de $\mathcal{F}(\ell_1)$ sont triviaux.

Démonstration : ⓐ Soit $p_k : Lip_0(\Omega_{f(k)}) \longrightarrow \underbrace{Lip_0(\Omega_{f(k)})}_{Y_k}$ la projection telle que $P(Y) \simeq \ell_1^k$.

Alors $p_k^* : Y_k^* \longrightarrow Y_k^*$ est une projection telle que $P_k^*(Y_k^*) \simeq \ell_\infty^k$

ⓑ $i : \Omega_{f(k)} \underset{\text{isométrie}}{\hookrightarrow} \ell_1$ où on pose $0 = (\underbrace{-1,\dots,-1}_{f(k)\text{ fois}}, 0, 0, \dots)$

$r : Lip_0(\ell_1) \longrightarrow Y_k$

et $r^* : Y_k^* \longrightarrow Lip_0(\ell_1)^*$ est une isométrie.

ⓒ résulte du théorème de Maurey et Pisier : $\ell_\infty^n \underset{unif}{\hookrightarrow} X \Leftrightarrow$ cotype $X = \infty$

De plus, $\mathcal{F}(\ell_1)^{**} = (Lip_0(\ell_1))^*$ et de manière générale, si cotype $X^{**} = \infty$, alors cotype $X = \infty$: X^{**} est finiment représentable dans X.

[Rappel : • Soit M un espace métrique pointé et $0 \in M$. $\mathcal{F}(M)$ est le prédual de $Lip_0(M)$ correspondant à la fermeture des Diracs dans $Lip_0(M)^*$. C'est l'espace Lipschitz-libre de M]

[• On dit que X a cotype q si $\exists C>0$ $\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}}$]

Mendel et Naor ont défini le cotype q pour les espaces métriques.

Une tentative précédente avait été de définir le cotype non-linéaire par le cotype de $(Lip_0(M))^*$.

Mais on voudrait que cela coïncide avec le cotype pour les espaces de Banach.

On ℓ_1 a cotype 2 et $(\mathcal{L}ip_0(\ell_1))^*$ a cotype ∞.

Preuve du Théorème : on va prouver que $\ell_1^k \underset{K_2,C}{\subseteq} \mathcal{L}ip_0\left(\mathbb{Z}_{j(k)}^{2^k}\right)$ où $\mathbb{Z}_j = \mathbb{Z}/j\mathbb{Z} =$  $\{e^{2i\ell\pi/j}\}$

ou plutôt, que $\ell_1^k \underset{K_3,C}{\subseteq} \mathcal{L}ip_0(\mathbb{T}^{2^k})$ muni de la distance normalisée.

[ici, X^n est muni de $d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d(x_i,y_i)$.],

ou plutôt, que $\ell_1^k \underset{K_3\,C}{\subseteq} \underbrace{W^{1,\infty}(\mathbb{T}^{2^k})}_{W}$, l'espace de Sobolev de toutes les f^{ns} mesurables bornées telles que $\sup_{1\le s\le 2^k} \|\partial_s f\|_\infty < \infty$

↑ dérivée partielle distributionnelle.

Plus précisément, $\exists P_k : W \longrightarrow W$, $\|P_k\| \le K_3$, tel que $P_k(W) \subset \operatorname{span}_{-N\le m\le N} e^{imt} = W'_N \subset \mathcal{L}ip_0$

Soient F_m les noyaux de Fejér sur $\mathbb{T}^{2^k}$.

Pour $f \in \mathcal{L}ip_0(\mathbb{T}^{2^k})$, $f * F_n \in W'_n$

et $f \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}^n)'$, $f * F_n \xrightarrow{\text{spft}} f$

Suite de l'argument : Soit $(k_j) \subset \mathbb{N}$ croissant assez vite et fixons $k = J$ $= \dim \ell_1^k$

Soit $\sigma : \{1, \dots, 2^J\} \longrightarrow \Omega_J$, $((\sigma(s)))_{s=1}^{2^J}$ suite de tous les J-uplets.

$$P_J : W \longrightarrow W$$
$$f \longmapsto \sum_{j=1}^{J} \hat{f}(k_j\sigma_j(1), \dots, k_j\sigma_j(2^J))\, e^{2i\pi k_j \sum_{s=1}^{2^J} \sigma_j(s) t_s}$$

P se factorise en
$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "P"] \arrow[dr, "P_1"'] & & W \\ & \ell_1 \arrow[ur, "P_2"'] & \end{tikzcd}$$
où $P_1 : f \longmapsto (\hat{f}(a_j))_{j=1}^{J} \in \ell_1$

$P_2 : \ell_1 \longrightarrow W$

$e_j \longmapsto \dfrac{1}{k_j} e^{2i\pi a_j \sum_{s=1}^{2^J} \sigma_j(s) t_s}$