19/10/2012

Gilles

D'après Naor-Schechtman :

" Planar earthmover is not in L_1 "

<u>Problème du transport optimal</u> (X,d) métrique

$\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{x_i}$ avec $a_i > 0$

$\nu = \sum_{j=1}^{m} b_j \delta_{y_j}$ avec $b_j > 0$ où $\sum a_i = \sum b_j = M$.

On va considérer $d(x_i, y_j)$ comme le coût du transport de x_i vers y_j

$\pi(x_i, y_j) \geqslant 0$ la masse transportée de x_i vers y_j

Ainsi $\sum_i \pi(x_i, y_j) = b_j$ et
$\sum_j \pi(x_i, y_j) = a_i$: on va noter $\pi \in E_{\mu,\nu}$ "plan de transfert"

On a $E_{\mu,\nu} \neq \emptyset$ puisque $\pi(x_i, y_j) = \frac{a_i b_j}{M} = \mu \otimes \nu$ marche

Le pb est de minimiser $I(\pi) = \sum_{i,j} \pi(x_i, y_j)\, d(x_i, y_j)$

Si $\tau(\mu,\nu)$ est le minimum, on définit ainsi une distance sur $\mathcal{P}_1(X) = \mathrm{conv}\{\delta_x : x \in X\}$
$(M=1)$

Cela remonte au mémoire <u>Sur les déblais et remblais</u> de Gaspard Monge (1780)

Espace Lipschitz libre : $0 \in X$: $\mathrm{Lip}_0(X) = \{ f : X \xrightarrow{\mathrm{Lip}} \mathbb{R} \mid f(0) = 0 \}$

Alors $\delta_x : \mathrm{Lip}_0(X) \longrightarrow \mathbb{R}$
$f \longmapsto f(x)$ est une f.l. On pose $\mathcal{F}(X) = \overline{\mathrm{vect}}^{\|\cdot\|}\{\delta_x : x \in X\}$
dans $\mathrm{Lip}_0(X)^*$

Alors $\mathrm{Lip}_0(X)$ est le dual de $\mathcal{F}(X)$

Ex : $L_\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$
$f \longmapsto \left(x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt\right)$ isométrie surjective w^*-continue

et ainsi $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \equiv L^1(\mathbb{R})$

Nous allons alors interpréter le résultat de Naor-Schechtman comme : $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2) \not\hookrightarrow L_1$.

Autre description de $\mathcal{F}(X)$:

Soit $m \in \mathcal{F}(X)$ de la forme $m = \sum_{\text{finie}} m(x)\delta_x$ avec $\sum m(x) = 0$

[Weaver appelle cela une molécule.] Notons $\mathcal{M}$ leur espace.

On peut écrire $m = \mu - \nu$ ($\mu_+ - \mu_-$) avec μ et ν comme précédemment !

Une molécule élémentaire est $m_{x,y} = \delta_x - \delta_y$.

Alors m se décompose en molécules élémentaires : à chaque plan de transfert correspond une telle décomposition $\sum_{i,j} \pi(x_i, y_j) m_{x_i, y_j}$

La norme d'Arens-Eels est $\|m\|_{Æ} = \inf \left\{ \sum_{i,j} \pi(x_i,y_j) d(x_i,y_j) : \pi \in E_{\mu,\nu} \right\}$

$= \tau(\mu,\nu) = \tau(m_+, m_-)$

- Soit $m = \sum \pi(x_i, y_j) m_{x_i, y_j}$. Si $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$,

$|\langle m, f\rangle| = \left|\sum_{i,j} \pi(x_i,y_j)\{f(y_j) - f(x_i)\}\right| \leq \left(\sum_{i,j} \pi(x_i,y_j) d(x_i,y_j)\right) \mathrm{Lip}_0 f$

En prenant l'inf en π, $|\langle m, f\rangle| \leq \|m\|_{Æ} \mathrm{Lip}_0(f)$ et donc $\|m\|_{\mathcal{F}(X)} \leq \|m\|_{Æ}$

- Soit $\phi \in (\mathcal{M}, \|\cdot\|_{Æ})^*$ et posons $f(x) = \phi(\delta_x - \delta_0)$: $f(0) = 0$ et

$|f(x) - f(y)| = |\phi(\delta_x - \delta_y)| \leq \|\phi\| \|\delta_x - \delta_y\|_{Æ} \leq \|\phi\| . d(x,y)$ et donc $\mathrm{Lip}_0 f \leq \|\phi\|_{Æ^*}$

- Si m est de nouveau de la forme ci-dessus,

$\langle m, f\rangle = \sum_{i,j} \pi(x_i,y_j)(f(x_i) - f(y_j)) \leq \left(\sum_{i,j} \pi(x_i,y_j) d(x_i,y_j)\right) \|\phi\|_{Æ}$

On a $\langle m, f\rangle = \phi(m)$ et par Hahn-Banach, on trouvera f qui fait aussi bien : donc $\|m\|_{\mathcal{F}(X)} \geq \|m\|_{Æ}$

On a démontré une variante élémentaire du théorème de Kantorovich-Rubinstein :

$\boxed{(\mathcal{P}_1(X), \tau) \longrightarrow (\mathcal{F}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{F}(X)}) \text{ est une isométrie.}}$

Le théorème de Naor et Schechtman en est une forme quantitative :

Th Soit $X=\{0,\dots,n-1\}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ euclidien et $F:\mathcal{S}_1(X)\longrightarrow L_1$ tel que pour $\mu,\nu\in \mathcal{S}_1(X)$ $\tau(\mu,\nu)\leq \|F(\mu)-F(\nu)\|_1 \leq L\,\tau(\mu,\nu)$.

Alors $L\geq C\sqrt{\log n}$

Cor $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2) \not\hookrightarrow L_1$.

Fixons n.

n.b. : $\delta_0 = 0_{\mathcal{F}(X)}$ et donc $\delta_x=\delta_x-\delta_0$ est une molécule

Lemme 1 : $\exists N\ \exists T : (\mathcal{M}, \|\ \|_{\mathcal{E}}) \overset{\text{complété de}}{=} \mathcal{F}(X) \longrightarrow \ell_1^N$ linéaire $\forall m\in\mathcal{M}$ $\|m\|_{\mathcal{E}}\leq \|Tm\|_{\ell_1^N}\leq 2L\|m\|_{\mathcal{E}}$

Dém : Soit μ_0 la mesure uniforme et supposons en toute généralité que $F(\mu_0)=0$.

Soit $\mu\in\mathcal{M}$ tel que $\mu=\mu_+-\mu_-$: $\mu_+=\sum a_i\delta_{x_i}$
$\mu_-=\sum b_j\delta_{y_j}$ $\quad x_i\neq y_j$

Soit $\pi\in\Gamma_{\mu^+,\mu^-}$: $\sum'_{i,j}\pi(x_i,y_j)\,\underbrace{d(x_i,y_j)}_{\geq 1}\geq \sum'_{i,j}\pi(x_i,y_j)=\mu^+(X)=\mu^-(X)$

Ainsi $\|\mu\|_{\mathcal{E}}\geq \|\mu^+(X)\|\geq \max|\mu(x)|$

Ainsi $\psi : B_{\mathcal{M}}\longrightarrow \mathcal{S}_1(X)$

$\mu\longmapsto \sum'_x \frac{\mu(x)+1}{n^2}\delta_x$ où $|\mu(x)|\leq 1$

et donc $\sum_x \frac{\mu(x)+1}{n^2}=1$ car $\sum_x\mu(x)=0$.

Si $\mu,\nu\in B_{\mathcal{M}}$, $\tau(\psi(\mu),\psi(\nu))=\frac{1}{n^2}\sup_{f\in B_{\mathrm{Lip}_0(X)}}\left|\sum'_x(\mu(x)-\nu(x))f(x)\right|$

$=\frac{1}{n^2}\|\mu-\nu\|_{\mathcal{E}}$

Ainsi $\tau(\psi(\mu),\psi(\nu))=\frac{1}{n^2}\tau(\mu,\nu)$

On considère $h : B_{\mathcal{M}}\xrightarrow{n^2\psi}\mathcal{S}_1(X)\xrightarrow{F}L_1$. Alors $h(0)=0$ et

$\tau(\mu,\nu)\leq\|h(\mu)-h(\nu)\|_1\leq L\,\tau(\mu,\nu)$.

Pour étendre h à tout l'espace : $\mu\longmapsto\left(\left(k\,h\left(\frac{\mu}{k}\right)\right)\right)_k$. On a distorsion$(\tilde h)\leq L$:
$\tau(\mu,\nu)\leq\|\tilde h(\mu)-\tilde h(\nu)\|\leq L\tau(\mu,\nu)$.

$\mathcal{M}$ est séparable et donc $\tilde h(\mathcal{M})\subseteq Z\equiv L_1$.

Par Heinrich-Mankiewicz ('80), il existe $U:\mathcal{M}\longrightarrow L_1^{**}$ linéaire tel que

$\forall\mu\in\mathcal{M}$ $\|\mu\|\leq\|U\mu\|\leq L\|\mu\|$ (1).

[Il existe des points de G-différentiabilité faible de $\tilde h$ tels que $D\tilde h(\mu_0)$ vérifie (1)] $\mathcal{M}\underset{\sim}{\hookrightarrow}L_1^{**}$

Comme $\dim M < \infty$, la réflexivité locale donne $M \underset{3/2L}{\hookrightarrow} L_1$

De plus, $\forall F \subset L_1$ $\exists G \subset L_1$ $G \underset{1+\varepsilon}{\sim} \ell_1^N$ tel que $F \subseteq G$.

$\to$ ce sont les fonctions étagées qui "composent" ℓ_1^N

Donc $M \underset{2L}{\overset{\sim}{\hookrightarrow}} \ell_1^N$.

Idée de la suite : $T : M \to \ell_1^N$ a un adjoint $T^* : \ell_\infty^N \to Lip_0(X)$ tel que $\|T\| \le 2L$, $T(B_{\ell_\infty^N}) \supset B_{Lip_0(X)}$

$Lip_0(X) \subset \ell_2(X)$: on regarde $\mathcal{F} \circ T^*$ ($\mathcal{F}$ transformée de Fourier)

Étape 1 : utiliser $\|T^*\| \le 2L$ pour montrer que $\mathcal{F}(T^*(B_{\ell_\infty^N})) \subseteq \{y \in \ell_2(X) : |y| \le 4L\}$

Étape 2 : utiliser $T(B_{\ell_\infty^N}) \supset B_{Lip_0(X)}$ pour prouver que $\|x\|_2 \ge \frac{Cn}{\sqrt{\log n}}$ avec $\|x\|_2 \le 4Ln$.

Col : On obtient $L \ge C\sqrt{\log n}$.

Soit $W = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$ muni de $\|f\|_W = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} |f(i,j+1) - f(i,j)| + n\sum_{i=0}^{n-2} |f(i+1,0) - f(i,0)| + n\sum_{j=0}^{n-2} |f(0,j+1) - f(0,j)|$

C'est un espace de Sobolev discret.

Notons $I_1 : Lip_0(X) \to W$ identité

$I_2 : W \to \ell_2(X)$

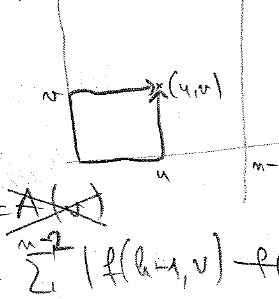
$F : \ell_2(X) \to \ell_2(X)$ défini par $F(f)(u,v) = \frac{1}{n^2} \sum_{(k,l) \in X}' f(k,l) e^{\frac{2i\pi}{n}(ku+lv)}$

$\mathcal{F} : \ell_2(X) \to \ell_2(X)$ où $\mathcal{F}(f) = \operatorname{Im} F(f)(u,v) = \frac{1}{n^2} \sum_{(k,l) \in X}' f(k,l) \sin \frac{2\pi}{n}(ku+lv)$

Lemme 2 : (a) $\|I_1\| \le 4n(n-1)$

(b) $\|I_2\| \le \frac{1}{2}$

(c) $\|\mathcal{F}\| \le \frac{1}{n}$.



Dém : (a) compter les termes.

(b) $|f(u,v)| \le \sum_{l=0}^{n-1} |f(0,l+1) - f(0,l)| + \sum_{k=0}^{u-1} |f(k+1,v) - f(k,v)| = \cancel{A(v)}$

$\le \sum_{l=0}^{n-2} |f(0,l+1) - f(0,l)| + \sum_{k=0}^{n-2} |f(k+1,v) - f(k,v)| = A(v)$.

et aussi $|f(u,v)| \le \sum_{k=0}^{n-2} |f(k+1,0) - f(k,0)| + \sum_{l=0}^{n-2} |f(u,l+1) - f(u,l)| = B(u)$

Alors $\|f\|_2^2 = \sum_{u,v} |f(u,v)|^2 \le \sum_{u,v} B(u)A(v) \le \frac{1}{4}\left[\sum' B(u) + \sum' A(v)\right]^2$

Or $\sum_{v=0}^{n-1} A(v) = n \sum_{l=0}^{n-2} |f(0,l+1)-f(0,l)| + \sum_{v=0}^{n-1}\sum_{h=0}^{n-2} |f(h+1,v)-f(h,v)|$

Dem $\sum_{u=0}^{n-1} B(u) = n \sum_{k=0}^{n-2} |f(k+1,0)-f(k,0)| + \sum_{u=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-2} |f(u,l+1)-f(u,l)|$

et donc $\|f\|_1 \le \frac{1}{n}\|f\|_W$.

(c) exprime le fait que σ est multiple d'un unitaire.

Maintenant, si Y, Z sont des Banach, et $A : Y \to Z$, $\pi_1(A) = \inf\{K > 0 : (*)\}$

$(*)$ $\forall y_1, \dots, y_m \in Y \ \exists y^* \in S_{Y^*}$ $\sum \|Ay_j\|_Z \le K \sum_{j=1}^m |y^*(y_j)|$

<u>Lemme 3</u> : $\pi_1(I_1) \le 4n(n-1)$, $I_1 : Lip_0(X) \to W$, et donc $\pi_1(\sigma \circ I_2 \circ I_1 \circ T^*) \le 4n$

<u>Dém</u> : Si $f_1, \dots, f_m \in Lip_0(X)$, $\sum_{j=1}^m \|f_j\|_W = \sum_{s=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-2}\sum_j \big(|f_j(s,t+1)-f_j(s,t)| + |f_j(t+1,s)-f_j(t,s)|\big)$

$+ n\sum_{t=0}^{n-2}\sum_j \big[|f_j(0,t+1)-f_j(0,t)| + |f_j(t+1,0)-f_j(t,0)|\big]$

$\le 4n(n-1)\sum_j |f_j(s_0,t_0+1)-f_j(s_0,t_0)|$ par exemple.

Considérons alors $y^* = \delta_{(s_0,t_0+1)} - \delta_{(s_0,t_0)} \in S_{Lip_0(X)^*}$

On a bien $\sum_{j=1}^m \|f_j\|_W \le 4n(n-1) \sum |y^*(f_j)|$ pour un certain s_0, t_0.

<u>Lemme 4</u> (Factorisation de Pietsch dans un cadre très particulier) Si $A : \ell_\infty^N \to Y$, il existe $(\sigma(h))_{h=1}^N$, $\sigma(h) \ge 0$, $\sum_{h=1}^N \sigma(h) = 1$ telle que si $x \in \ell_\infty^N$, $\|Ax\|_Y \le \pi_1(A) \underbrace{\sum \sigma(h)|x(h)|}_{\|x\|_{L_1(\sigma)}}$

Dem : Si $x_1, \dots, x_m \in \ell_\infty^N$, $\sum_{j=1}^m \|Ax_j\|_Y \le \pi_1(A) \sup_{x^* \in S_{\ell_1^N}} \sum |x^*(x_j)|$

car $B_{\ell_1^n} = \mathrm{conv}(\pm e_k : k \le N)$ $= \pi_1(A) \sup_{h \le N} \sum |x_j(h)|$

$$\begin{tikzcd} \ell_\infty^n \arrow[rr] \arrow[dr, "Id"'] & & Y \\ & L^1(\sigma) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Or si on prend $x_j = e_j$, $\sum_{j=1}^N \|Ae_j\|_Y \le \pi_1(A) \times 1$

$\sigma(k) = \dfrac{\|Ae_k\|_Y}{\sum_{j=1}^N \|Ae_j\|_Y}$, on obtient

$\|Ax\|_Y = \|\sum x(h) A(e_h)\|_Y \le (\sum \|Ae_j\|_Y) \times \sum \sigma(h)|x(h)|$

$\le \pi_1(A) \times \sum \sigma(h)|x(h)|$

<u>Lemme 5</u> : bornitude en ordre : si $R : (\mathbb{R}^N, \|\ \|_\sigma) \to \ell_2$ et $f : \{1, \dots, N\} \to [0, \infty[$,

alors $\exists x \in \ell_2^+$ $|g| \le f \Rightarrow |Rg| \le x$ avec $\|x\|_2 \le \|R\| \, \|f\|_{L^1(\sigma)}$.

Écrivons $R = [R_{ij}]_{i \in \mathbb{N}}^{j=1,\dots,N}$: $(Rf)_i = \sum_{j=1}^N R_{ij} f(j)$

Considérons $R^*: \ell_2 \to (\mathbb{R}^N, \|\ \|_\sigma^*)$, où $\|\varphi\|_\sigma^* = \max \left|\frac{\varphi(j)}{\sigma(j)}\right|$.

Ici, $\|R\| = \|R^*\| = \sup_{\sum |f(i)|^2 \leq 1} \max_{j \in N} \left|\frac{R^* f(j)}{\sigma(j)}\right| = \sup\max \left|\frac{\sum R_{ij} f(i)}{\sigma(j)}\right|$

$$= \max_j \frac{1}{\sigma(j)} \sup_{\sum |f(i)|^2 \leq 1} \left|\sum_i R_{ij} f(i)\right| = \max_j \frac{1}{\sigma(j)} \left(\sum_i |R_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

Posons $x_i = \sum_j |R_{ij}| f(j)$: $|(Rg)_i| = \left|\sum_j R_{ij} g(j)\right| \leq x_i$ et $\|x\|_2 = \left[\sum_i \left(\sum_j R_{ij} f(j)\right)^2\right]^{1/2}$

$$\leq \sum_j \left(\sum_i |R_{ij} f(j)|^2\right)^{1/2}$$

Car $\|\ \|_{\ell_p(\ell_q)} \leq \|\ \|_{\ell_q(\ell_p)}$ si $p \geq q$.

Ici, c'est simple puisque $\|\ \|_{\ell_\infty(J, \ell_2(I))} \leq \|\ \|_{\ell_2(I, \ell_\infty(J))}$.

$\sup_j \left(\sum_i |a_{ij}|^2\right)^{1/2} \geq \left(\sum_i \sup_j |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$

$\sup_j \sum_i |a_{ij}|^2 \geq \sum_i \sup_j |a_{ij}|^2$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{fin} : \|x\|_2 &\leq \sum_j \left(\sum_i R_{ij} f(j)^2\right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{j=1}^N \sigma(j) f(j) \frac{1}{\sigma(j)} \left(\sum_i |R_{ij}|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \|R\| \sum_{j=1}^N \sigma(j) f(j) = \|R\|\, \|f\|_\sigma . \end{aligned}}$$

Preuve du théorème : $A = \mathcal{F} \circ I_2 \circ I_1 \circ T^* : \ell_\infty^N \to \ell_2(X)$: $\pi_1(A) \leq 4nL$

Alors $T^*(B_{\ell_\infty^N}) \supset B_{\mathrm{Lip}_0(X)}$. Soit $(k,l) \in \{0, \dots, n-1\}^2$ et $(u,v) \in \{1, \dots, n-1\}$

Alors $\varphi_{u,v}(k,l) = \frac{1}{u+v} \sin\left(\frac{2\pi}{n}(ku+lv)\right)$ satisfait $\mathrm{lip}\, \varphi_{u,v} \leq \frac{2\pi}{n}$.

$\hookrightarrow$ implique qu'existe $\Phi_{u,v} \in B_{\ell_\infty^N}$ avec $\|\Phi_{u,v}\|_\infty \leq \frac{2\pi}{n}$ et $T^*(\Phi_{u,v}) = \varphi_{u,v}$

et pour $j \leq N$ $|\Phi_{u,v}(j)| \leq \frac{2\pi}{n}$ $\|f\|_\sigma = \frac{2\pi}{n}$ et $f(j) = \frac{2\pi}{n}$.

On va en déduire qu'existe $x \in \ell_2^+(X)$ tel que pour tout u,v $|A(\Phi_{u,v})| \leq x$

avec $\|x\|_2 \leq 4nL \times \frac{2\pi}{n} = 8\pi L$: il suffit de combiner les lemmes 4 et 5. (inégalité ponctuelle)

$\boxed{\forall u,v\ |x_{u,v}| \geq A(\varphi_{u,v})(u,v)}$

$$A(\varphi_{u,v})(u,v) = \mathcal{F}(\varphi_{u,v})(u,v) = \frac{1}{n^2} \sum_{(k,l) \in X} \frac{1}{u+v} \sin^2\left(\frac{(ku+lv)2\pi}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{u+v} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \left[-\frac{1}{4} e^{i\frac{2\pi}{n}(2ku+2lv)} - \frac{1}{4} e^{-\frac{i\pi}{n}(2ku+2lv)} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2(u+v)} & \text{si } (u,v) \neq \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi $(8\pi L)^2 \geq \|x\|_2^2 \geq \frac{1}{4} \sum_{u=0}^{n-1} \sum_{v=0}^{n} \frac{1}{(u+v)^2} \geq c \log n$

Q ouverts $\ell_\infty^n \not\hookrightarrow \mathcal{F}(\ell_1)$

$\ell_\infty^n \not\hookrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$