Tony 26/10/2012

Article de Bourgain[1986] : suite du 5/10/2012

Proposition (Bourgain 1986) : $\exists K_1\ \forall k \in \mathbb{N}\quad \ell_1^k \overset{K_1}{\simeq} X \overset{K_1}{\underset{c}{\subseteq}} Lip_0(\mathbb{T}^{2^k})$ où $\mathbb{T}^{2^k}$ est le ℓ^1-produit de $(\mathbb{T}, d)$, d distance normalisée

On a vraiment besoin de la complémentation : il suffit de mq $\exists K_2\ \forall k \in \mathbb{N}\ \ell_1^k \overset{K_2}{\simeq} X \overset{K_2}{\underset{c}{\subseteq}} W^{1,\infty}(\mathbb{T}^{2^k})$ où $W = W^{1,\infty}(\mathbb{T}^{2^k}) = \{ \overset{\text{nulle en } 1}{f} : \forall 1 \leq s \leq 2^k\ \ \partial_s f \in L_\infty(\mathbb{T}^{2^k}) \}$. En effet, soit F_N le noyau de Fejér de $\mathbb{T}^{2^k}$: $F_N(\vartheta) = \prod_{s=1}^{2^k} \sum_{j=-N}^{N} \frac{N-|j|}{N} e^{2i\pi j \vartheta_s}$. Si on considère C_N l'opérateur de convolution par F_N sur $Lip_0(\mathbb{T}^{2^k}) \longrightarrow W$, alors $\|C_N\| = 1$ et $\underset{\text{i.e. } (F_N * f)' = F_N * f' \to f'}{C_N \circ i} \xrightarrow{\text{simplement ponctuellement}} Id_W$, où $i : W \hookrightarrow Lip_0(\mathbb{T}^{2^k})$

Si on a

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"] & Lip_0(\mathbb{T}^{2^k}) \arrow[d, "C_N"] \\ X & X \leftarrow \hat{W} \end{tikzcd}$$

, il existe N telque $\|C_N \circ i|_X - Id_W|_X\| < \varepsilon$ et donc $\|iC_N|_{i(X)} - Id_{Lip}|_{i(X)}\| < \varepsilon$ et $\|(iC_N|_{i(X)})^{-1}\| < \frac{1}{1-\varepsilon}$ et $\|C_N|_{i(X)}^{-1}\| < \frac{1}{1-\varepsilon}$

Soit $(k_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ une suite croissant assez vite et fixons $k = J$ et $\sigma : \{1, \ldots, 2^J\} \xrightarrow{\text{bijection}} \{-1, 1\}^J$

Soit $P_1(f) = \left(k_j \operatorname{Im} \hat{f}(k_j \sigma_j)\right)_{j=1}^{J}$ et $\sigma_j = (\varepsilon_s)_{s=1}^{2^J}$

$P_2 e_j := \frac{i}{k_j}\left(\underbrace{e^{2\pi i k_j (\sigma_j \cdot \vartheta)}}_{\chi_j} - \underbrace{e^{-\cdots}}_{\chi_{-j}}\right)$ où $\sigma_j \cdot \vartheta = \sum_{s=1}^{2^J} \sigma_j(s) \vartheta_s$. Alors $\|P_2 e_j\| = 4\pi$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "P"] \arrow[dr, "P_1"'] & & W \\ & \ell_1^k \arrow[ur, "P_2"'] & \end{tikzcd}$$

Comme les e_j sont les points extrémaux de la boule unité de ℓ_1^k, $\|P\| = 4\pi$. On a aussi $P_1 P_2 e_j = e_j$.

En effet, on a $\hat{\chi}_j(k_i \sigma_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $\operatorname{Im} \hat{f}(k_j \sigma_j) = \frac{\hat{f}(k_j \sigma_j) - \hat{f}(-k_j \sigma_j)}{2i}$ car f à valeurs réelles.

Cherchons à majorer $\|P_1\|$: Définissons $A : \mathbb{T}^{2^J} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$\vartheta \longmapsto \prod_{j=1}^{J} (1 + \cos 2\pi k_j \sigma_j \cdot \vartheta) = \prod_{j=1}^{J} \left(1 + \frac{\chi_j(\vartheta) + \chi_{-j}(\vartheta)}{2}\right)$$

C'est un produit de Riesz : $A \geq 0$, $\int_{\mathbb{T}^{2^k}} A(\vartheta) = 1$.

<u>Lemme</u> : Soit $k_1 > 0$ et $k_j > 2 \sum_{i<j} k_i$. Alors $\varepsilon = (\varepsilon_i) \in \{0, -1, 1\}^{<\omega} \longmapsto \sum_{i=1}^{|\varepsilon|} \varepsilon_i k_i$ est "presque injective" et nulle ssi $\varepsilon = 0$

Preuve : par récurrence sur $|\varepsilon|$: si $|\varepsilon| = 1$ ✓ ; si $\overset{\text{c'est vrai pour}}{|\varepsilon| = j-1}$, soit $\sum_{i<j}' \xi_i k_i \pm k_j = \sum_{i<j}' \varepsilon_i k_i$.

Alors $\pm k_j = \sum_{i<j}' (\varepsilon_i - \xi_i) k_i$ et donc $k_j \leq 2 \sum_{i<j} k_j$ ↯.

On voit alors que $\|f * A\|_W \leq \|f\|_W$ car $\partial_s(f * A)(\vartheta) = (\partial_s f) * A(\vartheta)$.

et $f * A(\vartheta) = \hat{f}(0) + \sum_{j=1}^{J} \{ D_{j,+}(\vartheta) \chi_j(\vartheta) + D_{j,-}(\vartheta) \chi_{-j}(\vartheta) \}$ où $D_{j,\pm}(\vartheta) = \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon \in \{0, \pm 1\}^{j-1}}' \underbrace{\frac{\prod_{i<j} \chi_{\varepsilon_i i}(\vartheta)}{2^{\|\varepsilon\|_1}} \times \hat{f}(\varepsilon_i k_i \sigma_i \pm k_j \sigma_j)}_{L_{\pm j, \varepsilon}(\vartheta)}$

En effet, $f * \chi_j = \hat{f}(j) \chi_j$.

<u>Observation</u> : $L_{j,\varepsilon} = \overline{L_{-j,-\varepsilon}}$ car f réelle.

$$\partial_s(f * A)(\vartheta) = (-2\pi) \sum_{j=1}^{J} \sum_{\varepsilon}' \Big(\overset{\text{correspond à la } \Sigma \text{ qu'on veut majorer}}{\underbrace{k_j \sigma_j(s)}_{a_j}} + \overset{\text{perturbation}}{\underbrace{\sum_{i<j} \varepsilon_i k_i \sigma_i(s)}_{b_{j,\varepsilon}}} \Big) \underbrace{\operatorname{Im} L_{j,\varepsilon} \chi_j}_{c_{j,\varepsilon}} \quad (*)$$

Bourgain dit ici que $f * A \approx \sum 2\pi k_j \sigma_j(s) \left(D_{j,+} \chi_j - D_{j,-} \chi_{-j}\right)$

- Si $\left| \sum_{j=1}^{J} \sum_{\varepsilon}' k_j \sigma_j(s) \operatorname{Im} L_{j,\varepsilon}(\vartheta) \chi_j(\vartheta) \right|$ atteint son max en ϑ, alors tous les termes de cette double somme sont positifs à condition que k_j croît vite croisse. ["on a affaire à un ensemble de Sidon"] : $(*) \geq \frac{1}{2} \left| \sum_{j=1}^{J_1} \sum_{\varepsilon}' \underbrace{k_j \sigma_j(s)}_{a_j} \underbrace{\operatorname{Im} L_{j,\varepsilon} \chi_j(\vartheta)}_{c_{j,\varepsilon}} \right|$ (#)

En effet, par l'hypothèse sur les k_j, $a_j c_j := |a_j c_{j,\varepsilon}| > 2 |b_{j,\varepsilon} c_{j,\varepsilon}|$ pour tous j, ε.

Donc $a_j c_{j,\varepsilon} + b_{j,\varepsilon} c_{j,\varepsilon} > \frac{1}{2} a_j c_{j,\varepsilon}$.

Or $(\#) = \left| \sum_{j=1}^{J} k_j \sigma_j(s) \operatorname{Im} D_{j,+} \chi_j(\vartheta) \right| = \sum' k_j \underbrace{\left| \operatorname{Im} D_{j,+} \chi_j(\vartheta) \right|}_{(**)}$

et si on sait que $(**) \geq \int_{\mathbb{T}^{2^k}} \left| \operatorname{Im} D_{j,+} \underbrace{\chi_j(\vartheta)}_{1} \right| dt$, alors on aurait que $\geq \left| \int_{\mathbb{T}^{2^k}} \operatorname{Im} D_{j,+} \right|$; or $\int \operatorname{Im} D_{j,+} = \hat{f}(k_j \sigma_j) - \hat{f}(-k_j \sigma_j)$

et $(\#)$ serait $\geq \sum' k_j \underbrace{\left| \hat{f}(k_j \sigma_j) - \hat{f}(-k_j \sigma_j) \right|}_{\| D_1 f \|_1}$

Quand on passe de ℓ_1^n à ℓ_1, on note que ℓ_1 est complémenté dans W, mais on n'en sait rien quant à $L_{p_0}(\mathbb{T}^{2^k})$!

La suite : • version quantitative du non-plgt grossier des espaces L-libres de $c_0(\ell_p)$. Naor - Gildea - Chevalier.

- obstruction "spectral gap", plgt de graphe, matrice d'adjacence dont la première vaut $\lambda_1 = 1$, et $1 - \lambda_2$ est le spectral gap → Mendel & Naor.

→ reconstruction de graphes expanseurs qui ne se plgt dans aucun superréflexif.