

Produits de Riesz et ensemble de Sidon.

(1)

Definition: Soit G groupe abélien compact ($G = \mathbb{T}$) et Γ dual, noté additivement ($\Gamma = \mathbb{Z}$). Soit $\Lambda \subset \mathbb{Z}$. Λ est Sidon de constante S si pour tout polynôme trigonométrique $f = \sum_{\lambda \in \Lambda} \hat{f}(\lambda) e_\lambda$ ($e_\lambda(z) = z^\lambda$) on a

$$(*) \quad \|f\|_{A(\pi)} \equiv \sum |\hat{f}(\lambda)| \leq S \sup_{z \in \mathbb{T}} |f(z)| = S \|f\|_{B(\pi)}$$

Caractérisation parmi d'autres: Λ est Sidon si $\widehat{M(\pi)}|_\Lambda = \ell^\infty(\Lambda)$
 $\widehat{L^1(\pi)}|_\Lambda = c_0(\Lambda)$

(**) $\forall (e_\lambda) \in \ell^\infty(\Lambda) \exists \mu \in M(\pi) \quad (\forall \lambda \in \Lambda \hat{\mu}(\lambda) = e_\lambda)$ et $\|\mu\|_{M(\pi)} \leq S \|(e_\lambda)\|_{\ell^\infty(\Lambda)}$
 "toute suite bornée peut être interpolée sur Λ par une mesure."

"toute suite nulle à l'infini ————— fonction intégrable"

La caractérisation qui va nous servir ici est:

$$(***) \quad \forall (z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \mathbb{T}^\Lambda \exists \mu \in B M(\pi) \quad \forall \lambda \in \Lambda \operatorname{Re}(z_\lambda \hat{\mu}(\lambda)) \geq \frac{1}{S}$$

(*) $\Rightarrow$ (***) Soit $(z_\lambda) \in \mathbb{T}^\Lambda$. Il existe μ tel que $\|\mu\| \leq S$ et $\hat{\mu}(\lambda) = \overline{z_\lambda}$.

Alors $\operatorname{Re}(z_\lambda \hat{\mu}(\lambda)) = 1$ donc $\frac{\mu}{\|\mu\|}$ fait ce qu'on demande.

(***) $\Rightarrow$ (*) Soit f polynôme trigonométrique porté par Λ et $(z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \mathbb{T}^\Lambda$ tel que $\hat{f}(\lambda) = z_\lambda |\hat{f}(\lambda)|$. Soit $\mu \in B M(\pi)$ tel que $\operatorname{Re}(z_\lambda \hat{\mu}(\lambda)) \geq \frac{1}{S}$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \|f\|_{B(\pi)} &\geq \operatorname{Re} \int_{\mathbb{T}} f d\mu = \operatorname{Re} \sum_{\lambda \in \Lambda} \hat{f}(\lambda) \hat{\mu}(-\lambda) \\ &= \operatorname{Re} \sum_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda |\hat{f}(\lambda)| \hat{\mu}(-\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} |\hat{f}(\lambda)| \operatorname{Re}(z_\lambda \hat{\mu}(-\lambda)) \geq \frac{1}{S} \sum_{\lambda \in \Lambda} |\hat{f}(\lambda)| \end{aligned}$$

(*) $\Rightarrow$ (**) Soit $\varphi \in \ell^\infty(\Lambda)$. Soit l la forme linéaire sur le sous-espace des polynômes trigonométriques défini par $l(f) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi(\lambda) \hat{f}(\lambda)$: alors sa norme sur cet espace est bornée par $\|\varphi\|_{\ell^\infty(\Lambda)} \sup_{f \in B(\pi)} \sum_{\lambda \in \Lambda} |\hat{f}(\lambda)| = S \|\varphi\|_{\ell^\infty(\Lambda)}$. L'étendre en une f.l. sur $B(\pi)$, c'est-à-dire une mesure ν bornée par cela: $l(f) = \int f d\nu$. Donc $\hat{\nu}(-\lambda) = l(e_\lambda) = \varphi(\lambda)$.

[n.b.: non considère $\mu(z) = \nu(-z)$, oua $\int f(z) d\mu(z) = \int f(-z) d\nu(z)$] ⁽⁷⁾

Rappel de Toni: Λ est qd [quasi-indépendant] si pour toute suite $\varepsilon = (\varepsilon_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ à support fini et valeurs $\{-1, 0, 1\}$ oua $\sum_{\lambda \in \Lambda} \varepsilon_\lambda \lambda \neq 0$ sauf si $\varepsilon = 0$.

Tout ensemble qd est Solon. On va utiliser $\mathbb{Z}_2$

Produit de Riesz: ① $R_F = \prod_{\lambda \in F} (1 + \frac{e_\lambda + e_{-\lambda}}{2})$ pour F fini. Ona $R_F \geq 0$!

Dans ce produit, on va exactement trouver tous les produits de termes qui sont pour chaque $\lambda \in F$, soit 1 soit $\frac{e_\lambda}{2}$ soit $\frac{e_{-\lambda}}{2}$.

Si on code le choix fait pour chaque $\lambda \in F$ par $\varepsilon_\lambda = 0, \varepsilon_\lambda = 1, \varepsilon_\lambda = -1$, le terme s'écrit $(\frac{1}{2})^{|\varepsilon_\lambda|} e_{\varepsilon_\lambda \lambda}$. Donc $R_F = \sum_{\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}^F} (\frac{1}{2})^{\sum |\varepsilon_\lambda|} e_{\sum \varepsilon_\lambda \lambda}$.

et la qd indique que $\widehat{R_F}(0) = 1$: $\sum \varepsilon_\lambda \lambda \neq 0$ sauf si $\varepsilon = 0$: donc R_F est une proba!
Donc, pour chaque $\gamma \in F$, $\widehat{R_F}(\gamma) = \sum_{\varepsilon} (\frac{1}{2})^{\sum |\varepsilon_\lambda|} : \gamma = \sum \varepsilon_\lambda \lambda \leq 1$. et $\sum_{\varepsilon \text{ indépendant}} \leq \frac{1}{2}$
Maintenant compliquons un peu la donne: pour $z = (z_\lambda) \in \mathbb{T}^\Lambda$, on considère

$R_{F,z} = \prod_{\lambda \in F} (1 + a \frac{z_\lambda e_\lambda + \bar{z}_\lambda e_{-\lambda}}{2})$ avec a un paramètre qu'on va optimiser, $0 \leq a \leq 1$

Comme avant, $R_{F,z}$ va être une proba: $\widehat{R_{F,z}}(0) = 1$ et regardons

$\widehat{R_{F,z}}(\gamma)$ pour $\gamma \in \Lambda$: $R_{F,z} = \sum_{\varepsilon} (\frac{a}{2})^{\sum |\varepsilon_\lambda|} (\prod z_\lambda^{\varepsilon_\lambda}) e_{\sum \varepsilon_\lambda \lambda}$

Soit $\gamma \neq 0$ et (ε_λ) tel que $\gamma = \sum \varepsilon_\lambda \lambda$. Alors $\varepsilon_\lambda \neq 0$ (sinon penses ε_λ de l'autre côté) et si $\varepsilon_\gamma = 1$, $\varepsilon_\lambda = 0$ pour $\lambda \neq \gamma$ (simplifier γ). Si $\varepsilon_\gamma = -1$, il y a nécessairement d'autres termes ε_λ non nuls, à moins que $\gamma = -\gamma$ (penser aux Rademacher!)

Donc, si $\gamma \neq -\gamma$, $\widehat{R_{F,z}}(\gamma) = \frac{a}{2} z_\gamma + \widehat{R_{F,z}}(\gamma)$ avec

$$|\widehat{R_{F,z}}(\gamma)| \leq \sum_{\varepsilon \text{ à support de plus d'un point}} (\frac{a}{2})^{\sum |\varepsilon_\lambda|} : \gamma = \sum \varepsilon_\lambda \lambda \leq a^2 \sum \{ (\frac{1}{2})^{\sum |\varepsilon_\lambda|} : \gamma = \sum \varepsilon_\lambda \lambda \} \leq \frac{a^2}{2}$$

Considérons maintenant $R_{F,z}^* = \int_0^{2\pi} R_{F,z} e^{it} \frac{dt}{2\pi}$ moyenne!

$$= \sum (\frac{a}{2})^{\sum |\varepsilon_\lambda|} (\prod z_\lambda^{\varepsilon_\lambda}) e_{\sum \varepsilon_\lambda \lambda} \int_0^{2\pi} \underbrace{\prod e^{it \varepsilon_\lambda}}_{e^{it \sum \varepsilon_\lambda \lambda}} e^{-it} \frac{dt}{2\pi}$$

$$= \sum_{\sum \varepsilon_\lambda = 1} (\frac{a}{2})^{\sum |\varepsilon_\lambda|} (\prod z_\lambda^{\varepsilon_\lambda}) e_{\sum \varepsilon_\lambda \lambda}$$

C'est une mesure de norme ≤ 1 et $\widehat{R_{F,z}^*}(\gamma) = \frac{a}{2} z_\gamma + \widehat{R_{F,z}^*}(\gamma)$ avec

$$|\widehat{R_{F,z}^*}(\gamma)| \leq \widehat{R_{F,1}^*}(\gamma) \leq \sum (\frac{a}{2})^{\sum |\varepsilon_\lambda|} : \sum \varepsilon_\lambda = 1, \gamma = \sum \varepsilon_\lambda \lambda \leq a^3 \sum \{ (\frac{1}{2})^{\sum |\varepsilon_\lambda|} : \sum \varepsilon_\lambda = 1, \gamma = \sum \varepsilon_\lambda \lambda \} \leq \frac{a^3}{2}$$

Donc de $(\frac{a}{2} \widehat{R_{F,z}^*}(\gamma)) \geq \frac{a}{2} - \frac{a^3}{2}$ optimise quand $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $S \leq 3\sqrt{3}$

* 1^{er} produit de Riest pour (e_λ) dans $B_{\text{pro}}(\Lambda)$, soit

$$R_{F,\varphi} = \prod_{\lambda \in F} \left(1 + \frac{e_\lambda e_{-\lambda}}{2} \right)$$

C'est une probabilité;

Regardons quand, pour $\gamma \neq 0$, $\sum_{\lambda \in F} e_\lambda \lambda = \gamma$.

Si Λ satisfait la propriété $\sum_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda \lambda = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$ pour

toute suite Λ à support fini (celle que $e_\lambda \in \{-1, 0, 1\}$ et, pour au plus un d'autre eux, $e_\lambda = 2$, alors on fait $R_{F,\varphi}$ interpolé!

C'est ainsi qu'on montre que si $\Lambda = (\lambda_n) \subset \mathbb{N}^*$, $\lambda_n \geq 3\lambda_{n-1}$ alors Λ est selon de constante ≤ 2 . $|\sum e_\lambda \lambda| \geq 3\lambda_{\max-1} - 2\lambda_{\max-1} - \lambda_{\max-2} - \dots$

$$= \lambda_{\max-1} - \lambda_{\max-2} - \dots > 0$$

Les quasi-indépendants sont une classe plus large qui peut s'exprimer par:

le # d'écriture d'un elt de Γ comme somme d'elts distincts de Λ

est au plus unique : ex : $\Lambda = (2^k)$ dans $\mathbb{Z}$,

ou $\lambda_n \geq 2\lambda_{n-1}$: $\sum e_\lambda \lambda = 0$

$$\lambda_{\max} - \lambda_{\max-1} - \dots = 0$$

$$\lambda_{\max-1} - \dots = 0$$

$$\lambda_{\min} = 0$$

⚠ Λ ne peut contenir 0.