

$$\mathcal{F}([0,1]^2) \not\hookrightarrow_{u,g} L_2$$

Plan: a) Théorème (Aharoni, Maurey, Mityagin, 85): $X \hookrightarrow_u H \Leftrightarrow X \lesssim L_0$
pour les e.m. linéaires.

$$(\text{Randrianarivony, 05}) \quad X \hookrightarrow_g H \Leftrightarrow X \lesssim L_0$$

b) On va montrer qu'il existe $Y \subseteq \mathcal{F}([0,1]^2)$ avec $Y \equiv \ell_1(\mathcal{F}([0,1]^2))$

c) Théorème (Kalton, 85): $\ell_1(X) \lesssim L_0 \Leftrightarrow X \lesssim L_1$

d) Théorème (Nard et Schechtman, 07): S'il existe $F: \mathcal{S}_{\{0, \dots, m\}} \rightarrow L_1$ telle que
 $\forall \mu, \nu \in \mathcal{S}_{\{0, \dots, m\}}, \|\mu - \nu\| \leq \|F(\mu) - F(\nu)\| \leq C \|\mu - \nu\|$, alors $C \geq L \sqrt{\log m}$.

Conclusion: Alors $\mathcal{S}_{\{0, \dots, m\}} \not\hookrightarrow_{L_1} L_1$ unité en m

$$\mathcal{F}([0, \dots, m]^2) \not\hookrightarrow_{L_1} L_1$$

$$\mathcal{F}([0, \frac{1}{m}, \dots, 1]^2) \not\hookrightarrow_{L_1} L_1$$

$$\mathcal{F}([0,1]^2) \not\hookrightarrow_{L_1} L_1 \text{ et donc } \neq L_1$$

b) Montrons qu'il existe $Y \subseteq \mathcal{F}([0,1]^2)$ tel que $Y \equiv \ell_1(\mathcal{F}([0,1]^2))$

Soit $\{S_j\}_{j=1}^\infty$ une suite de carrés disjoints de $[0,1]^2$ telle que

$$\forall j \neq k, d(S_j, S_k) = \min_{\substack{a \in S_j \\ b \in S_k}} d(a, b) \geq \max(\text{diam } S_j, \text{diam } S_k) \quad (1)$$

Posons $Y := \{\mu \in \mathcal{F}([0,1]^2), \text{supp } \mu \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty S_j \text{ et } \mu(S_j) \leq 1 \text{ pour tout } j\}$

$\rightarrow$ Si $\mu \in Y$ et $\text{supp } \mu \subseteq \bigcup S_j$, S_j disjoints, il existe μ_j de support $\subseteq S_j$
avec $\mu_j(S_j) = 1$.

Notons que $\|\mu\| = \sum \|\mu_j\|$. On peut supposer μ à support fini, i.e. $\mu = m$ molécule.

Donc $m = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i} - \sum_{k=1}^n b_k \delta_{y_k}$ avec $a_i, b_k \geq 0$ et $\sum a_i = \sum b_k$.

On a alors $m = \sum m_j$ avec $m_j = \sum_{i \in S_j} a_i \delta_{x_i} - \sum_{k \in S_j} b_k \delta_{y_k}$ avec $\sum a_i = \sum b_k$.

Souvent ds $\pi_j \in E_{m_j^+, m_j^-}$: $\pi_j(x_i, y_h) \geq 0$, $\sum_i \pi_j(x_i, y_h) = a_i$, $\sum_i \pi_j(x_i, y_h) = b_h$
 Alors $\pi = \sum \pi_j \in E_{m^+, m^-}$. $\sum_j \pi_j(x, y) = m_j^+(x)$, $\sum_j \pi_j(x, y) = m_j^-(y)$.

On a vu qu'on a $\|\pi\| = \inf_{\pi \in E_{m^+, m^-}} \sum_{i,h} \pi(x_i, y_h) d(x_i, y_h)$

Ainsi $\|\pi\| \leq \sum_{i,h} \sum_j \pi_j(x_i, y_h) d(x_i, y_h) = \sum_j \sum_{i,h} \pi_j(x_i, y_h) d(x_i, y_h)$; en passant à l'inf, on obtient
 $\leq \sum_j \|\pi_j\|$

Réciproquement, si $\pi \in E_{m^+, m^-}$, posons pour A $\sigma_j(A) = \pi(A \times \bigcup_{l \neq j} S_l)$
 $\sigma_j'(A) = \pi(\bigcup_{l \neq j} S_l \times A)$

"lemme qui rentrent et qui sortent" Ainsi $\sigma_j(S_j) = \sigma_j'(S_j)$

Définissons un nouveau plan de transfert à support dans $U(S_j \times S_j)$:

$$\tilde{\pi} = \overbrace{\pi|_{U(S_j \times S_j)}}^{\pi_1} + \overbrace{\sum_i \frac{1}{\sigma_j(S_j)} \sigma_j \otimes \sigma_j'}^{\pi_2} \text{ Donc } \text{supp } \tilde{\pi} \subset U(S_j \times S_j)$$

De plus $\tilde{\pi} \in E_{m^+, m^-}$: $m^+(x) = \sum_y \tilde{\pi}(x, y) = \sum_{y \in S_{j_0}} \pi(x, y) + \sum_{y \notin S_{j_0}} \pi(x, y)$
 $\underbrace{\sum_{y \in S_{j_0}} \pi(x, y)}_{\sigma_j(x)} \quad \underbrace{\sum_{y \notin S_{j_0}} \pi(x, y)}_{\pi - \sigma_j(x)}$

En fait, $\sum_{y \in S_{j_0}} \pi(x, y) = \sum_{y \in S_{j_0}} \sum_i \frac{1}{\sigma_j(S_j)} \sigma_j(x) \sigma_j'(y)$
 $= \sum_{y \in S_{j_0}} \frac{1}{\sigma_j(S_j)} \sigma_j(x) \sigma_j'(y) = \sigma_j(x) = \sum_{y \in S_{j_0}} \pi(x, y)$

Ce qu'on a fait, c'est qu'on a annulé le transport entre les S_j : tout va lieu à l'intérieur de S_j .

Donc $\tilde{\pi}_j = \tilde{\pi}|_{S_j} \in E_{m_j^+, m_j^-}$ et montrons que $\sum_j \|\pi_j\| \leq \sum_{(x,y) \in U(S_j \times S_j)} \pi(x,y) d(x,y)$:

$$\sum_j \|\pi_j\| \leq \sum_j \sum_{x,y} \tilde{\pi}_j(x,y) d(x,y) = \sum_j \sum_{x,y} (\pi_1(x,y) + \pi_2(x,y)) d(x,y)$$

Or $\sum_{x \in S_j} d(x,y) \sigma_j(x) = \sum_{x \in S_j} \sum_{z \in S_j} d(x,y) \pi(x,z) \leq \sum_{x \in S_j} \sum_{z \in S_j} d(x,z) \pi(x,z)$

et si $x,y \in S_j$, $d(x,y) \leq \text{diam } S_j < \min_{\substack{a \in S_j \\ b \notin S_j}} d(a,b) \leq d(x,y)$

En somme, $\frac{1}{\sigma_j(S_j)} \sum_{x,y \in S_j} d(x,y) \sigma_j(x) \sigma_j'(y)$
 $\leq \frac{1}{\sigma_j(S_j)} \sum_{y \in S_j} \sigma_j'(y) \sum_{\substack{x \in S_j \\ z \in S_j}} d(x,z) \pi(x,z) = \sum_{\substack{x \in S_j \\ z \in S_j}} d(x,z) \pi(x,z)$
 $\sigma_j'(S_j) = \sigma_j(S_j)$

$$\text{et } \sum_j \|m_j\| \leq \sum_{(u,y) \in \cup (S_j \times S_j)} \pi(u,y) d(u,y) + \sum_j \sum_{\substack{u \in S_j \\ t \notin S_j}} d(u,t) \pi(u,t) = \sum_{\substack{x \in \cup S_j \\ y \in \cup S_j}} d(u,y) \pi(u,y)$$

En passant à l'infimum sur π , $\sum_j \|m_j\| \leq \|m\|$.

On a donc montré que $Y = \left(\bigoplus_j \mathcal{F}(S_j) \right)_0$, or $\mathcal{F}(S_j) \equiv \mathcal{F}([0,1]^2)$.

Donc $Y \equiv \ell_1(\mathcal{F}([0,1]^2))$ et ainsi $\mathcal{F}([0,1]^2) \xrightarrow[u,q]{} L_2$.

d) Théorème de Naor et Schechtman.

En effet, si $\mathcal{F}(\{0, \dots, n\}^2) \xrightarrow[u,q]{} L_2$ uniformément en n ,

alors aussi $\mathcal{F}(\{\frac{0}{n}, \dots, \frac{n}{n}\}^2) \xrightarrow[u,q]{} L_2$ uniformément en n .

et en prenant la limite, $\mathcal{F}([0,1]^2) \xrightarrow[u,q]{} (L_2)_u = L_2$. (densité de $\{\frac{0}{n}, \dots, \frac{n}{n}\}^2$ de $[0,1]^2$)

Il n'existe pas de fonctions $f_n: \mathcal{D}_{[0,1]^2} \rightarrow L_2$ telles que $\sqrt{\|\mu - \nu\|} \leq \|f_n(\mu) - f_n(\nu)\| \leq C\sqrt{\|\mu - \nu\|}$.

Notons $S \subset \mathcal{D}_{[0,1]^2}$ la boule unité de $\mathcal{F}(\{0, \dots, n\}^2)$.

Si de telles fonctions existent, alors $\exists g_n: \mathcal{F}(\{0, \dots, n\}^2) \rightarrow \ell^2$

telles que pour $\mu, \nu \in S$, $\sqrt{\|\mu - \nu\|} \leq \|g_n(\mu) - g_n(\nu)\| \leq C\sqrt{\|\mu - \nu\|}$

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ et $\tilde{g}_n: \mathcal{F}(\{0, \dots, n\}^2) \rightarrow (L_2)_u$
 $\mu \mapsto \lim_{\mathcal{U}} \sqrt{j} g_n(\frac{\mu}{j})$

Si $\mu, \nu \in \mathcal{F}_{[0,1]^2}$, et $j \in \mathcal{U}$ que $\|\frac{\mu}{j}\|, \|\frac{\nu}{j}\| \leq 1$,

$$\sqrt{\|\mu - \nu\|} = \sqrt{j} \sqrt{\|\frac{\mu}{j} - \frac{\nu}{j}\|} \leq \sqrt{j} \|g_n(\frac{\mu}{j}) - g_n(\frac{\nu}{j})\| \leq C\sqrt{j} \sqrt{\|\frac{\mu}{j} - \frac{\nu}{j}\|} = C\sqrt{\|\mu - \nu\|}$$

$$\sqrt{\|\mu - \nu\|} \leq \|\tilde{g}_n(\mu) - \tilde{g}_n(\nu)\| \leq C\sqrt{\|\mu - \nu\|}$$

Il y a ici une question ouverte