23/11/2012

Plgts grossiers uniformes dans les Banach réflexifs (d'après Kalton)

Th: Tout e. métrique <u>stable</u> se plonge dans un superréflexif

Déf: (M,d) est stable si pour (x_n), (y_n) bornées dans M, $\mathcal{U},\mathcal{V}$ ultrafiltres libres sur $\mathbb{N}$

on a $\lim\limits_{n\to\mathcal{U}} \lim\limits_{m\to\mathcal{V}} d(x_n,y_m) = \lim\limits_{m\to\mathcal{V}} \lim\limits_{n\to\mathcal{U}} d(x_n,y_m)$

<u>ou</u> : dès que toutes les limites ci-dessous existent, alors $\lim\limits_n \lim\limits_m d(x_n,y_m) = \lim\limits_m \lim\limits_n d(x_n,y_m)$. (*)

<u>Remarque</u>: si les limites sont infinies.

→ quitte à extraire, on a $d(x_n,0) \to \infty$.

- $\forall m$ $\lim\limits_n d(x_n,y_m)=\infty$ et donc $\lim\limits_m \lim\limits_n d(x_n,y_m)=\infty$.
- Deux cas : (i) $\forall n$ $\lim\limits_m d(x_n,y_m)=\infty$: alors $\lim\limits_n \lim\limits_m d(x_n,y_m)=\infty$

  (ii) $\exists n_0$ $\lim\limits_m d(x_{n_0},y_m)=C<\infty$ et

  $d(x_n,y_m) \geq d(x_n,x_{n_0}) - d(x_{n_0},y_m) \geq d(x_n,x_{n_0}) - C$

  et $\lim\limits_m d(x_n,y_m) \geq d(x_n,x_{n_0}) - C$ et donc $\lim\limits_n \lim\limits_m d(x_n,y_m)=\infty$.

Donc : si une des suites vérifie $d(x_n,0)\to\infty$, alors les deux limites doubles valent ∞.

<u>Exemples</u>: • Si (M,d) métrique propre (i.e. boules de M relativement compactes), alors (M,d) est stable. (E evn de dim finie)

- Si M est un espace de Hilbert, $\|x_n-y_m\|^2=\|x_n\|^2+\|y_m\|^2-2\langle x_n,y_m\rangle$ et la compacité faible des bornés de H montre que H est stable
- L^1 est stable : cela repose sur ce que $e^{-\|x-y\|_1}$ est de type positif et $\|x-y\|_1$ est de type conditionnellement négatif.

  Ainsi il existe $U: L^1 \to B_H$ tel que $e^{-\|x-y\|_1}=\langle U(x),U(y)\rangle$.
- La stabilité passe aux s.e. fermés et donc si $1\leq p\leq 2$, L^p est stable.
- Si E Banach stable, et $1\leq p<\infty$, alors $L^p(E)$ est stable.
- c_0 n'est pas stable : soit $s_m=(\overbrace{1,\dots,1}^{m},0,0,\dots)$ et $e_n=(0,\dots,0,\overset{n}{1},0,\dots)$,

  $\lim\limits_n \lim\limits_m \|s_n+e_m\|_\infty = 1$ et $\lim\limits_m \lim\limits_n \|s_n+e_m\|=2$.

<u>Théorème</u> (Kalton 2007) : Soit (M,d) métrique stable. Alors il existe X réflexif et $\phi : M \to X$ plongement grossier et uniforme : $M \underset{\substack{\text{fortement} \\ \text{unif}^t}}{\hookrightarrow} X$.

<u>Idée</u> : · pour $a \in \,]0,1[$, soit $d_a = \begin{cases} d^a & \text{si } d \leq 1 \\ d & \text{si } d \geq 1 \end{cases}$, i.e. $d_a = \mathrm{Max}(d, d^a)$.

· Construire $W \subset B_{Lip_0(M,d_a)}$ tel que W soit w-rel^t-compact et pour $x \neq y \in M$, $\sup_{f \in W} |f(x) - f(y)| \geq \omega(d(x,y))$.

C'est ce qui permet de conclure : fin de la preuve : $S : \ell_1(W) \to Lip_0(M, d_a)$

$$(\xi_f)_{f \in W} \mapsto \sum_{f \in W} \xi_f f$$

$$S(B_{\ell_1(W)}) \subset \overline{\text{abs-conv}}(W) \text{ et } w\text{-compact}.$$

et Davis-Figiel-Johnson-Pełczyński (1974) : il existe Y réflexif et T, U tels que

$$\begin{tikzcd} \ell_1(W) \arrow[rr, "S"] \arrow[dr, "T"'] & & Lip_0(M,d_a) \\ & Y \arrow[ur, "U"'] & \end{tikzcd}$$

et $\|T\|, \|U\| \leq 1$. Diagramme dual :

$$\begin{tikzcd} & Lip_0(M,d_a)^* \arrow[rr, "S^*"] \arrow[dr, "U^*"] & & \ell_\infty(W) \\ M \arrow[ur, "\delta", "\text{isométrie}"'] & & Y^* = X \arrow[ur, "T^*"'] & \end{tikzcd}$$

et on posera $\phi = U^* \circ \delta : (M, d_a) \to X$

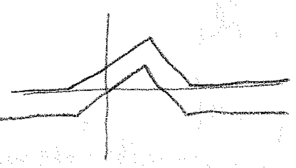
On aura $\|\phi(x) - \phi(y)\|_X \geq \|T^* \phi(x) - T^* \phi(y)\|_{\ell_\infty(W)}$

$$\geq \|S^*(\delta(x) - \delta(y))\|_{\ell_\infty(W)}$$

$$\geq \sup_{f \in W} |\langle \delta(x) - \delta(y), f \rangle| = \sup_{f \in W} |f(x) - f(y)| \geq \omega(d(x,y)).$$

Il faut donc construire ce W à la fois w-rel cpct et suffisamment riche pour "normer" : $\tilde{M} = \{(p,q) \in M \times M : p \neq q\}$

$(p,q) \in \tilde{M}$ et $g_{pq}(x) = [\mathrm{Max}(d(p,q) - d(x,q), 0) - \mathrm{Max}(d(p,q) - d(0,q), 0)]$



Alors $|g_{p,q}(x) - g_{p,q}(y)| \leq \mathrm{Min}(d(p,q), d(x,y))$

Puis posons $f_{p,q} = \begin{cases} g_{p,q} & \text{si } d(p,q) \leq 1 \\ \dfrac{g_{p,q}}{d(p,q)^{1-a}} & \text{si } d(p,q) \geq 1 \end{cases}$

Alors $f_{p,q} \in B_{Lip_0(M,d_a)}$ car $g_{p,q}$ est 1-Lipschitz pour (M,d)

On pose alors $W = \{f_{p,q} : (p,q) \in \tilde{M}\}$

Si $p \neq q \in M$, $|g_{p,q}(q) - g_{p,q}(p)| = d(p,q)$ et $|f_{p,q}(q) - f_{p,q}(p)| = \begin{cases} d(p,q) & \text{si } d(p,q) \leq 1 \\ d^a(p,q) & \text{si } d(p,q) \geq 1 \end{cases}$

et $\mathrm{Min}(d(x,y), d^a(x,y)) \leq \|\phi(x)-\phi(y)\| \leq \mathrm{Max}(d^a(x,y), d(x,y))$

Prouvons maintenant que W est f.r.c. :

$$V = \left| \frac{f_{p,q}(x) - f_{p,q}(y)}{d_a(x,y)} \right| \leq \begin{cases} d(p,q)^{1-a} & \text{si } d(p,q) \leq 1 \\ \frac{1}{d(p,q)^{1-a}} & \text{si } d(p,q) > 1 \end{cases} \quad (\dagger)$$

$$\leq \begin{cases} d(x,y)^{1-a} & \text{si } d(x,y) \leq 1 \\ \frac{d(p,q)}{d(x,y)} & \text{si } d(x,y) > 1. \end{cases} \quad (\ddagger)$$

On a $V \longrightarrow 0$ quand $d(p,q) \longrightarrow 0$ ou $+\infty$

ou $d(x,y) \longrightarrow 0$ ou $+\infty$.

(Il y a une seule astuce : $\min(a,b) \leq \cancel{a^\alpha b^{1-\alpha}}$)

Eberlein-Shmulyan : la compacité relative faible est déterminée par les suites :
il suffit de vérifier que toute suite $(f_n) = (f_{p_n,q_n})_n$ avec $(p_n,q_n) \in \tilde{M}$ admet une sous-suite faiblement convergente.

Or $E = \overline{\mathrm{vect}}\,\{f_n : n \geq 0\}$ est séparable $\subset \mathrm{Lip}_0(M, d_a)$.

Donc $\exists\, M_0 \subset M$ dénombrable contenant 0 et $p_n, q_n \in M_0$ tels que

$\|f\|_{\mathrm{Lip}_0(M,d_a)} = \|f\|_{\mathrm{Lip}_0(M_0,d_a)}$ (*)

Par un argument diagonal, on peut supposer $\begin{cases} \forall x \in M_0 \; f_n(x) \longrightarrow f(x) & \text{(limite simple)} \\ d(p_n,q_n) \longrightarrow r \in [0,+\infty] \\ \forall x \in M_0 \; \lim_n d(q_n,x) \text{ existe dans } [0,+\infty]. \end{cases}$

M_0 est suffisamment riche pour que $\|f\|_{Lip}$ s'y calcule.

Soit $\tilde{M}_0 = (M_0 \times M_0) \cap \tilde{M}$ et $V : \mathrm{Lip}_0(M,d_a) \longrightarrow \ell_\infty(\tilde{M}_0)$, $h \longmapsto \left(\frac{h(x)-h(y)}{d_a(x,y)}\right)_{(x,y)\in\tilde{M}_0}$ est une isométrie par (*).

$f \in B_{\mathrm{Lip}_0(M,d_a)}$ et on veut montrer que $f_n \xrightarrow{w} f$. Il suffit de montrer que $Vf_n \xrightarrow{w} Vf$

Argument d'algèbre de Banach : $B = \ell_\infty(\tilde{M}_0) \equiv C(S_B)$, S_B spectre de B.

Soit A la sous-algèbre de B engendrée par les constantes, $V(E)$, f, et, pour chaque $u \in M_0$, $(x,y) \longmapsto \arctan d(x,u)$
$(x,y) \longmapsto \arctan d(y,u)$
$(x,y) \longmapsto \arctan d(x,y)$.

A est une algèbre séparable, $A \equiv (C(S_A), \sigma(A^*,A))$ et $K = (S_A, \sigma(A^*,A))$ est un compact séparable. De plus, $i : \tilde{M}_0 \longrightarrow S_A$, $(x,y) \longmapsto [i(x,y) : A \longrightarrow \mathbb{R},\ u \longmapsto u(x,y)]$

et $\tilde{M}_0$ est dense dans K car sinon $\overline{\tilde{M}_0}^{\sigma(A^*,A)} \neq K$ et Urysohn donne f continue sur K, i.e. $f \in A$, telle que $f|_{\tilde{M}_0} = 0$ et $f \neq 0$.

De plus, $i|^{i(\tilde{M}_0)} : \tilde{M}_0 \to i(\tilde{M}_0)$ est un homéomorphisme sur son image.

Il suffit de démontrer que pour $\xi \in K$ $Vf_n(\xi) \to Vf(\xi)$

[th de Riesz + th de convergence dominée].

Soit $\xi \in K$ et $(x_m, y_m) \in \tilde{M}_0$ tels que $(x_m, y_m) \to \xi$.

Or $r = \lim d(p_n, q_n) \in [0, \infty]$; si $r = 0$ ou $r = +\infty$, alors $\|Vf_n\| \to 0$.
→ c'est l'inégalité (†) pour f_n.

Donc $\|f_n\| \to 0$ et comme $\|Vf_n - f_n\| \to 0$, $f = 0$.

Notons $t = \lim d(x_m, y_m)$. On a si $t = 0$ ou $+\infty$, $(Vf_n)_{(x_m,y_m)} \xrightarrow[m]{} 0$. Donc $Vf_n(\xi) = 0$ puisque $Vf_n \in C(K)$.
C'est l'inégalité (†) pour f_n

De même, $Vf(x_m, y_m) \to 0$ et $Vf(\xi) = 0$.

On peut ainsi supposer $0 < r < \infty$ et $0 < t < \infty$. L'interversion de limite arrive.

$$f_n(x_m) = \min\left(1, \frac{1}{d(p_n,q_n)^{1-a}}\right) \times [\quad], \text{ où}$$

$$[\quad] = [\max(d(p_n,q_n) - d(q_n,x_m), 0) - \max(d(p_n,q_n) - d(q_n,0), 0)]$$

M est stable et donc $\lim_m \lim_n f_n(x_m) = \lim_n \lim_m f_n(x_m)$

Donc $Vf(\xi) = \lim_m Vf(x_m, y_m) = \lim_m \lim_n \dfrac{f_n(x_m) - f_n(y_m)}{d_a(x_m, y_m)}$ car $f_n \to f$ simplement

$$= \lim_n \lim_m \frac{f_n(x_m) - f_n(y_m)}{d_a(x_m, y_m)} = \lim_n Vf_n(\xi)$$

Rem : Florent Baudier : espace métrique propre (M, d), X e. Banach sans cotype.
Alors $M \overset{\text{f.a.}}{\hookrightarrow} X = \left(\sum \ell_\infty^n\right)_{\ell_2}$ réflexif