

Plongements / espaces réflexifs / Propriété Q.

Tony
30/11/2012

Plan: - une condition nécessaire pour plongement grossier dans des espaces réflexifs.

Def.: Soit $f: N \rightarrow N$. On note $\omega_f(t) = \sup \{d(f(x), f(y)) : d(x, y) \leq t\}$
 $\varphi_f(t) = \inf \{ \dots \}$

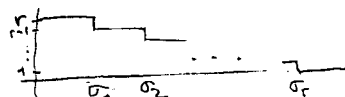
N.B.: Alors ω_f et φ_f sont croissantes et $\varphi_f(t) \leq \omega_f(t)$ si $t \in \text{im } d$.
 • f est un plongement grossier si ω_f prend des valeurs finies et $\varphi_f \rightarrow \infty$

Def.: Soit $M \subset N$ infini. On pose $\mathcal{S}_r(M) = \{\sigma \in M : |\sigma| = r\}$ et le munit d'une structure de graphe dont les arêtes sont $\{\sigma, \tau\}$ tels que si $\sigma = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_r\}$ et $\tau = \{\tau_1 < \dots < \tau_r\}$ on a $\sigma_1 < \tau_1 < \sigma_2 < \tau_2 < \dots < \sigma_r < \tau_r$.

N.B.: ce graphe est connexe. On le munit de la distance géodésique: $\text{diam } \mathcal{S}_r(M) = r$.

D'où vient ce graphe? Si on pose $f: \mathcal{S}_r(M) \rightarrow \mathbb{C}_0$

$$\sigma \mapsto \sum_{i=1}^r d(1, \sigma_i)$$



- Cette construction a été utilisée pour prouver que
- $\mathbb{C}_0$ ne se plonge pas grossièrement dans un espace dont tous les deux sont séparables.
- f est une isométrie.

Def.: Soit $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$. Un espace métrique M a $Q(\varepsilon, \delta)$ si $\forall r \in \mathbb{N} \forall f: \mathcal{S}_r(M) \rightarrow M$
 $\omega_f(r) \leq \delta \Rightarrow \exists M \subset N$ infini $\forall \sigma, \tau \in \mathcal{S}_r(M)$ $d(f(\sigma), f(\tau)) \leq \varepsilon$

N.B.: Il suffit de le vérifier pour $\sigma < \tau$, i.e., $\sigma_r < \tau_1$.

Pour $\Delta_M(\varepsilon) = \sup \{\delta : M \text{ a } Q(\varepsilon, \delta)\}$. Si M est un espace vectoriel normé,

$$\Delta_M(\lambda \varepsilon) = \lambda \Delta_M(\varepsilon) \text{ pour } \lambda \geq 0 \text{ et } \varepsilon > 0 \text{ et donc } \Delta_M(\varepsilon) = \Delta_M(1) \varepsilon.$$

Notons alors $Q_M = \Delta_M(1)$: M a la propriété Q si $Q_M > 0$.

$$\text{On a } Q_{\mathbb{C}_0} = 0$$

• X réflexif $\Rightarrow X$ a Q.

Rappel: Soit $f: \mathcal{S}_r(\mathbb{N}) \rightarrow X$ bornée et $\mathcal{U}$ ultrafiltre non principal, on pose

$$\partial_{\mathcal{U}} f(\sigma_1, \dots, \sigma_{r-1}) = \omega^* - \lim_{\mathcal{U}} f(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in X^{**}$$

General: $\partial_{\mathcal{U}}^r f(\sigma_1, \dots, \sigma_{r-k}) = \partial_{\mathcal{U}} \circ \dots \circ \partial_{\mathcal{U}} f(\sigma_1, \dots, \sigma_{r-k})$ et $\partial_{\mathcal{U}}^r f(\emptyset) = \partial_{\mathcal{U}}^r f \in X^{(r)}$.

Lemme 1: Soit $f: \mathcal{S}_r(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$, alors $\forall \varepsilon > 0 \exists M \subset \mathbb{N} \forall \sigma \in \mathcal{S}_r(M) |f(\sigma) - \partial_{\mathcal{U}}^r f| < \varepsilon$.

Dém: soit $m_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|\partial_{\mathcal{U}}^{r-1} f(m_1) - \partial_{\mathcal{U}}^r f| < \varepsilon$. Répétons.

Si $m_1 < \dots < m_n$ sont choisis dans $\mathbb{N}$, et qu'ils ont la propriété

$$\forall \sigma \subset \{m_1, \dots, m_n\} \text{ avec } s = |\sigma| \leq r-1, \text{ alors } |\partial_{\mathcal{U}}^{r-s} f(\sigma) - \partial_{\mathcal{U}}^r f| < \varepsilon.$$

Ainsi, pour chaque tel σ , il existe $A_\sigma \in \mathcal{U}$ tel que pour $m \in A_\sigma$ ($m > m_n$) on

$$\text{ait } |\partial_{\mathcal{U}}^{r-s-1} f(\sigma \cup \{m\}) - \partial_{\mathcal{U}}^r f| < \varepsilon. \text{ Alors } A = \bigcap_{\sigma} A_\sigma \in \mathcal{U} \text{ et on pose } m_{n+1} \in A$$

Lemme 2: Soit $f: \mathcal{S}_r(\mathbb{N}) \rightarrow X$ bornée. Alors $\forall \varepsilon > 0 \exists M \subset \mathbb{N} \forall \sigma \in \mathcal{S}_r(M)$ avec $m_{n+1} > m_n$
 $\|f(\sigma)\| \leq \|\partial_{\mathcal{U}}^r f\| + \omega_1(f) + \varepsilon.$

Dém: Soit $g: \mathcal{S}_r(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{S}_r$ telle que $\langle f(\tau), g(\tau) \rangle = \|f(\tau)\|$.

Posons $h: \mathcal{S}_{2r}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\sigma \mapsto \langle f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r), g(\sigma_1, \sigma_3, \dots, \sigma_{2r-1}) \rangle.$$

Par le lemme 1, il existe $M \subset \mathbb{N}$ tel que $|h(\sigma) - \partial_{\mathcal{U}}^{2r} h| < \varepsilon$. Notons $A = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$

et posons $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\}$. On a alors $\sigma \in \mathcal{S}_r(\{m_1, m_2, \dots\})$ choisi judicieusement

$$\begin{aligned} \text{quelque } \|f(\sigma)\| &= \langle f(\sigma), g(\sigma) \rangle = \underbrace{\langle f(\sigma'), g(\sigma) \rangle}_{h(\sigma_1, \sigma'_1, \sigma_2, \sigma'_2, \dots, \sigma_r, \sigma'_r)} + \underbrace{\langle f(\sigma) - f(\sigma'), g(\sigma) \rangle}_{\leq \omega_f(1)} \\ &\leq \|\partial_{\mathcal{U}}^r f\| + \omega_f(1) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Théorème: Soit X réflexif et $r \in \mathbb{N}$, $f: \mathcal{S}_r(\mathbb{N}) \rightarrow X$ bornée. Alors $\forall \varepsilon > 0 \exists M \subset \mathbb{N}$

$$\exists x \in X \forall \sigma \in \mathcal{S}_r(M) \quad \|f(\sigma) - x\| \leq \omega_f(1) + \varepsilon. \text{ Ainsi } Q_X \geq \frac{1}{2}.$$

Dém: on pose $f' = f - \partial_{\mathcal{U}}^r f$. Il existe M tel que $\|f'(\sigma)\| \leq 0 + \omega_f(1) + \varepsilon$.

Soit $\xi > 0$ et $2\xi < \xi$. Soit f telle que $\omega_f(1) \leq \delta$: il existe M tel que $\|f(\sigma) - f(\tau)\| \leq 2\omega_f(1) + 2\varepsilon < \xi$.

Donc $\Delta_X(\xi) \geq \frac{1}{2}\xi$.

Théorème 4: Soit M métrique. Si $M \xrightarrow{u} X$ réflexif, alors $\forall \varepsilon > 0 \Delta_M(\varepsilon) > 0$
 Si $M \xrightarrow{f} X$ réflexif, alors $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \Delta_M(\varepsilon) = \infty$

Dém.: $\mathcal{P}_r(N) \xrightarrow{f} M \xrightarrow{h} X$ et f tel que $w_f(1) \leq \delta$ (et donc $w_{h \circ f}(1) \leq w_h(\delta)$)
 Si h est uniforme ou grossier h est bornée sur les bornés.

Par le théorème 3, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que si $\sigma, \tau \in \mathcal{P}_r(M)$,
 $\varphi_h(d(f(\sigma), f(\tau))) \leq \|h \circ f(\sigma) - h \circ f(\tau)\| \leq 3 w_{h \circ f}(1) \leq 3 w_h(\delta)$.

Si h est un plongement uniforme, alors $\forall \varepsilon > 0 \exists \varepsilon' \varphi_h(t) < \varepsilon' \Rightarrow t < \varepsilon$
 (puisque $\varphi_h \uparrow, \varphi_h > 0, \varphi_h(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$). Fixons $\varepsilon > 0$ et soit ε' comme ci-dessus.

Prendons δ tel que $3 w_h(\delta) < \varepsilon'$. Alors $\varphi_h(d(f(\sigma), f(\tau))) < \varepsilon$. Donc $\Delta_M(\varepsilon) \geq \delta > 0$.

Si h est un plongement grossier, il suffit de prouver que $\Delta_M(\varepsilon_n) \rightarrow \infty$ pour
 une suite $\varepsilon_n \rightarrow \infty$. Soit $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}^+$ tel que $\forall h \forall \varepsilon > \varepsilon_n \varphi_h(\varepsilon_n) < \varphi_h(\varepsilon)$

et $\varepsilon_n \rightarrow \infty$. Soit δ_n maximal tel que $3 w_h(\delta_n) \leq \varphi_h(\varepsilon_n)$. Alors, par (*),
 $\varphi_h(d(f(\sigma), f(\tau))) \leq \varphi_h(\varepsilon_n)$ et donc $d(f(\sigma), f(\tau)) \leq \varepsilon_n$. Alors $\delta_n \rightarrow \infty$
 parce que $\varphi_h(\varepsilon_n) \rightarrow \infty$.

Corollaire: Si $M \in \mathcal{B}$ tel que $Q_M = 0$, alors (i) $B_M \not\xrightarrow{u} X$ réflexif et (ii) $M \not\xrightarrow{f} X$ réflexif
 $\rightarrow$ pour (i), noter que $\Delta_M(\varepsilon) = \Delta_{B_M}(\varepsilon)$ pour $\varepsilon \leq 1$.

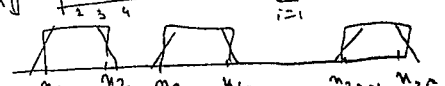
Exemples d'espaces sans propriété Q: c_0 , l'espace de James, J^* , X non réflexif de type non trivial.

Rappel: les espaces stables ont Q et se plongent dans les réflexifs.

Théorème 5: Si $X \in \mathcal{B}$ avec $Q_X > 0$, on a pour tout $\varepsilon > 0$ et toute $(x_n) \subset X$ bornée
 avec $x^{**} \notin \overline{\{x_n\}^{\sigma(X^{**}, X^*)}}$, une sous-suite $(y_n) \subset (x_n)$ telle que si $m_1 < m_2 < \dots < m_r$,
 alors $\|\sum_{i=1}^r (-1)^i y_{m_i}\| > (1-\varepsilon) Q_X d(X^{**}, X)^r$

Rappel sur J : $\|x\|_J = \sup_{\sigma \in \mathcal{P}_r(\mathbb{N})} \left(\sum_{i=1}^r (x_{\sigma_i} - x_{\sigma_{i-1}})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ et $J = \{x : \|x\|_J < \infty \text{ et } \lim_n x_n = 0\}$.

Preuve $X_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{[1, i]} \mathbb{1}_{[i, n]}$  $= \sum_{i=1}^n e_i$

Considérons $\|\sum_{i=1}^r (-1)^i X_{n_i}\|$  $= (2r)^{\frac{1}{2}} \neq cr$.

Donc J n'a pas Q. N.B.: $X_n \xrightarrow{\sigma(J^{**}, J)} (1, 1, \dots) \in J^{**} \setminus J$.

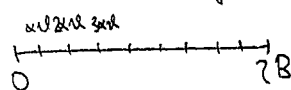
Preuve du théorème 5: Notons $\delta = d(x^{**}, X) > 0$, et $B = \sup \|x_n\|$. Soit $\lambda > 1$ et $\alpha > 0$ tel que $\lambda^{-2} Q_X - 2\alpha B - \alpha > (1-\epsilon) Q_X$.

Soit (v_n) la sous-suite de (x_n) telle que $d(\text{conv}(v_1, \dots, v_m), \text{conv}(v_{m+1}, \dots, v_n)) \geq \frac{\alpha}{\lambda}$ (Cf le critère de James). On fait ainsi: $\|x_n - x^{**}\| > \frac{\alpha}{\lambda}$. Par Hahn-Banach on a $f(x_n - x^{**}) > \frac{\alpha}{\lambda}$. Soit $V = \{y \in Y^{**} : f(y) > f(x_n) - \frac{\alpha}{\lambda}\} \supset \{x_m : m \in M_1\}$.

Si $v_1, \dots, v_m$ sont choisis avec $M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_n$, on separe $\text{conv}\{v_1, \dots, v_n\} + B_X(\frac{\alpha}{\lambda})$ de x^{**} . Puis on prend la diagonale.

$r=1$: il existe $\{b_r \in \mathbb{R} \mid M_1 \subset \mathbb{N} \text{ tel que } n \in P_r(M_1), b_r - \alpha \leq \|\sum_{j=1}^{2r} (-1)^j v_{\sigma_j}\| \leq b_r$

(Autre conséquence du théorème de Ramsey



On réitère: et on trouve $M_{n_1} \subset M_{n_2} \subset \dots \subset M_n$ tel que $\forall \sigma \in \mathcal{I}_{2r}(M_{n_1})$ $b_r - \alpha \leq \|\sum_{j=1}^{2r} (-1)^j v_{\sigma_j}\| \leq b_r$

Et il existe $\{y_n\}$ extraite de (v_n) telle que $\forall r \exists b_r \forall \sigma \in \mathcal{I}_{2r}(M)$ avec $\sigma_1 \geq \alpha r$ $b_r - \alpha \leq \|\sum_{j=1}^{2r} (-1)^j y_{\sigma_j}\| \leq b_r$.
Fixons $r \in \mathbb{N}$ et posons $f: \mathcal{I}_r([0, \infty]) \rightarrow X$. Alors $w_f(1)$ car $\otimes$

Donc, on pose $\varepsilon = \lambda b_r Q_X^{-1}$, $b_r < \Delta_X(\varepsilon) = \lambda b_r$. Par la propriété Q, il existe $\sigma < \tau \in \mathcal{I}_r(M)$ tels que $\|f(\sigma) - f(\tau)\| \leq \lambda b_r Q_X^{-1}$.

Or le théorème de James avec poids $\frac{1}{r}$ montre que $r \frac{\alpha}{\lambda} \leq \|f(\sigma) - f(\tau)\|$

[on pose $f(\sigma) = r \sum_{j=1}^{2r} \frac{1}{r} y_{\sigma_j}$, $f(\tau) = r \sum_{j=1}^{2r} \frac{1}{r} y_{\tau_j}$ et $\sigma < \tau \Rightarrow \|\sum_{j=1}^{2r} \frac{1}{r} y_{\sigma_j} - \sum_{j=1}^{2r} \frac{1}{r} y_{\tau_j}\| \geq \frac{\alpha}{\lambda}$

Soit $\sigma \in \mathcal{I}_{2r}(N)$: il existe $\tau \in \mathcal{I}_{2r}([0, \infty])$ et $\beta \in \{-1, +1\}$ tels que

$$\|\sum_{j=1}^{2r} (-1)^j y_{\sigma_j} + \beta \sum_{j=1}^{2r} (-1)^j y_{\tau_j}\| \leq 2\alpha r B$$

$$\|\sum_{j=1}^{2r} (-1)^j y_{\sigma_j}\| \geq \|\sum_{j=1}^{2r} (-1)^j y_{\tau_j}\| - \|\beta \sum_{j=1}^{2r} (-1)^j y_{\tau_j}\|$$

$$\geq b_r - \alpha - 2\alpha B r$$

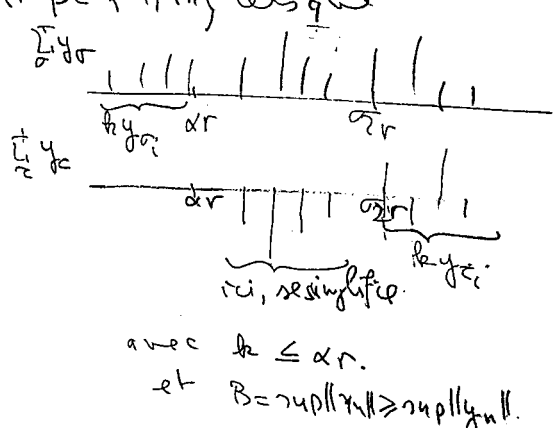
$$\geq \lambda^{-2} Q_X r - \alpha r - 2\alpha B r$$

$$\geq (1-\epsilon) Q_X r$$

Def: X a la propriété de Banach-Saks alternée si $\forall (x_n) \subset X$ bornée $\sum_{k=1}^n (-1)^k x_k \rightarrow 0$.

th: Si X a cette propriété et que $Q_X > 0$, alors X est réflexif.

Dem: Par le théorème 5, $\exists (x_n) \subset X$ bornée et x^{**} pt d'accumulation préfaible, il existe sous-suite et α tel que $\|\sum_{j=1}^{2r} (-1)^j y_{\sigma_j}\| \geq cr \delta(x^{**}, X)$.



Ainsi, pour $n_1 < n_2 < \dots < n_r$, existe $(n_i) \in \mathbb{N}$ telle que

$$\left\| \frac{1}{2^r} \sum_{j=1}^{2^r} (-1)^j y_{n_j} \right\| \geq \frac{c}{2} d(x^{**}, X)$$

$$\downarrow \\ 0 \quad \text{et donc } x^{**} \in X.$$

Or, par le théorème d'Eberlein-Smuljan ou Kaplansky, X est réflexif.

Or Bourgin a prouvé que si X a un type non trivial, alors X a Banach-Saks alternée.

Corollaire: X non-réflexif de type non trivial $\Rightarrow Q_X = 0$
de tels espaces existent: cf James, Pisier-Xu.

Autre résultat: $Q_{J^*} = 0$

En effet, (e_n^*) a un point d'accumulation préfaible $x^{***} \in J^{***}$.

$$\begin{aligned} \text{Or } \left\| \sum_{j=1}^{2^r} (-1)^j e_{n_j}^* \right\| &\leq \sqrt{r} : \text{ en tenant compte } x \in J, \\ \left\langle \sum_{j=1}^{2^r} (-1)^j e_{n_j}^*, x \right\rangle &= \sum_{j=1}^{2^r} (-1)^j x(n_j) \leq \sum_{j=1}^{2^r} |x_{n_{2j-1}} - x_{n_{2j}}| \\ &\leq \sqrt{r} \left(\sum_{j=1}^{2^r} |x_{n_{2j-1}} - x_{n_{2j}}|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{r} \|x\|_J. \end{aligned}$$

L'article montre aussi que si X est quasi-réflexif,

$X \in Q \Leftrightarrow X^{**}$ dual transfini s'écrit facilement en termes de X .

Question: Tout espace qui se plonge dans un réflexif, a-t-il non Q ?

i.e., est-ce que $Q \Rightarrow \exists Y$ réflexif $X \subset_{\text{ou}} Y$
 $B_X \xrightarrow{\pi} Y$

Tout réflexif peut-il être plongé dans un stable?

Que peut-on dire sur la constante?

On a montré que X réflexif $\Rightarrow \forall f: \mathcal{P}_r(M) \rightarrow X \exists M \forall \sigma, \tau \in \mathcal{P}_r(M)$
 $\|f(\sigma) - f(\tau)\| \leq \omega_f(1) + \varepsilon.$

Or $Q_X > 0 \Rightarrow \forall f: \mathcal{P}_r(M) \rightarrow X \nexists M \forall \delta < Q_X \nexists X \in Q(1, \delta):$

$\forall r \forall f: \mathcal{P}_r(M) \rightarrow X$ avec $\omega_f(1) < \delta \exists M \forall \sigma, \tau \in \mathcal{P}_r(M) \|f(\sigma) - f(\tau)\| < 1$