

- Ref. ① Cowling + Haagerup: completely bounded multipliers of the Fourier algebra of a simple Lie group of real rank one, 1989
- ② De Cannière + Haagerup: multipliers of the Fourier algebra of some simple Lie groups and their discrete subgroups.
- ③ Haagerup: Group C^* -algebras without the completely bounded approximation prop. (Preprint ~~the~~ 1988 ou 1989)

Carthé: • G groupe topologique loc⁺ c.p.t.

- λ représentation régulière gauche: on munit G d'une mesure de Haar à gauche et $\lambda: G \rightarrow \mathcal{U}(L^2(G))$ déf^{ie} par $\lambda(g)f(h) = f(g^{-1}h)$
- $W(A) = \lambda(A)''$ Δ Cette alg. n'a pas (je ne sais pas quand!)
- $M(A) = \{f: G \rightarrow \mathbb{C} : \lambda(g) \mapsto f(g)\lambda(g) \text{ s'étend en une appl. s.c.c.}$
 $m_f: VN(A) \ni \text{boîtes} \}$ et on note $\|f\|_{M(A)} = \|m_f\|$
- $\pi_0(A) = \{f \in M(A) : m_f \text{ est c. b.}\}$ et $\|f\|_{\pi_0(A)} = \|m_f\|_c$.

Def. G est w -moyennable s'il existe $L > 0$ et une suite généralisée $(u_i) \in C_c(G)$ telle que $\forall i \|u_i\|_{\pi_0(A)} \leq L$ et $u_i \rightarrow 1$ unif⁺ sur tout compact.

L'inf de tels L est $\Lambda_{cb}(G)$ (Haagerup le note $\Lambda(G)$)

→ intérêt: lien avec les algèbres de groupe.

① Th: Si $\Gamma \subseteq G$ est un s.-g. discret qui est un réseau (ex: $\mathbb{Z}_n \subseteq SL_n(\mathbb{R})$),
 alors $\Lambda_{cb}(\Gamma) = \Lambda_{cb}(G)$

② Th: Si Γ est un groupe discret, $\Lambda_{cb}(\Gamma) = \Lambda_{cb}(VN(\Gamma))$

où, si M est une a. VN, $\Lambda_{cb}(M) = \inf \{L : \exists \text{ suite généralisée } T_\alpha: M \rightarrow M \text{ op. bornée fin. (c.p.t.)} \text{ tel que } \|T_\alpha\|_{cb} \leq L \text{ et}$

Groupe de Lie de rang réel 1

Sur $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{C}^{n+1}$, $\mathbb{H}^{n+1}$

la f. bil. q par $\langle (x_0, \dots, x_n), (y_0, \dots, y_n) \rangle =$ pour $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$
 $= -\bar{y}_0 x_0 + \sum_{i=1}^n \bar{y}_i x_i$. Alors $SO(n, 1) =$ gpe de $\mathbb{R}$ -lin de $\mathbb{R}^{n+1}$ préservant q
 $SU(n, 1) = \mathbb{C} \quad \mathbb{C}^{n+1}$
 $Sp(n, 1) = \mathbb{H} \quad \mathbb{H}^{n+1}$
 groupe symplectique?

Th : Cartan - Haagerup : $\Lambda_d(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } G = SO(n,1) \text{ ou } SU(n,1) \\ 2n-1 & \text{si } G = Sp(n,1) \\ 21 & \text{si } G = F_4(-20) \end{cases}$

Ces groupes sont le groupe de Lie de rang réel 1.

On sait aussi que les groupes de Lie de rang réel supérieur ont $\Lambda_d(G) = +\infty$

Programme pour démontrer ce théorème : (1) mieux comprendre le aVN

(2) apprendre les groupes de Lie et le f^{∞} -théorie

- décomposition d'Iwasawa, le poids, le groupe parabolique
- décomposition de Cartan
- f^{∞} -théorie.

(3) travailler avec $\Lambda_d(G)$ → réduire le calcul du χ -Lie à un groupe parabolique

(4) très gros calculs.

h (Haagerup, preprint) (annexe A) G groupe l.c. et $\varphi: G \rightarrow \mathbb{C}$ continue. LEMME :

(i) $\|\varphi\|_{M_0(G)} \leq 1$

(ii) $\forall n \forall g_1, \dots, g_n \in G$ $\varphi(g_i^{-1}g_j)$ $1 \leq i, j \leq n$ définit un mult. Schur de norme ≤ 1
 $[\|a_{ij}\|_{\text{Schur}} \text{ et la norme de } (a_{ij}) \mapsto (a_{ij}; x_{ij}) \text{ dans } M_n(\mathbb{C})]$

(iii) il existe $H \in \text{Hilbert}$ et $\xi, \eta: G \rightarrow H$ f^{∞} -bornés (càd. $\|\xi(g)\|, \|\eta(h)\| \leq 1$ pour tout g, h)

tel que $\varphi(g^{-1}h) = \langle \xi(g), \eta(h) \rangle$

(iv) idem avec ξ, η f^{∞} -continue.

Dém : (i) $\Rightarrow$ (ii) : Soit $g_1, \dots, g_n \in M_n(\mathbb{C})$ et $\pi: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C}) \otimes VN(G)$

Fait : π est un $\ast$ -homomorphisme injectif $e_{ij} \mapsto e_{ij} \otimes \lambda(g_i^{-1}g_j)$

$$\bullet \pi(e_{ij})^{\ast} = e_{ji} \otimes \lambda((g_i^{-1}g_j)^{\ast}) = \pi(e_{ji}) = \pi(e_{ij}^{\ast})$$

$$\bullet \pi(e_{ij} p_{kl}) = e_{ij} p_{kl} \otimes \lambda(g_i^{-1}g_j g_k^{-1}g_l) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ e_{ij} \otimes \lambda(g_i^{-1}g_l) = \pi(e_{ij} p_{kl}) \end{cases}$$

On peut aussi écrire : $\pi(e_{ij}) = u^{\ast}(e_{ij} \otimes 1)u$ où $u = \begin{pmatrix} \lambda(g_1) \\ \vdots \\ \lambda(g_n) \end{pmatrix}$

De plus, $\text{id} \otimes m_{\varphi}(\text{Im } \pi) \subseteq \text{Im } \pi$ et $\pi^{-1} \circ (\text{id} \otimes m_{\varphi}) \circ \pi : e_{ij} \mapsto e_{ij} \otimes \varphi(g_i^{-1}g_j)$

$$e_{ij} \mapsto \pi^{-1}(e_{ij} \otimes \varphi(g_i^{-1}g_j) \lambda(g_i^{-1}g_j)) = \varphi(g_i^{-1}g_j) e_{ij}$$

et donc $\|\varphi(g_i^{-1}g_j)\|_{\text{Schur}} \leq \|(\text{id} \otimes m_{\varphi})\| \leq \|m_{\varphi}\|_{cb} = \|\varphi\|_{M_0(G)}$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : on utilise le lemme de Halmos : si $(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ et $\|(a_{ij})\|_{\text{Schur}} \leq 1$,
 alors $\exists \xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n \in B_H$ $a_{ij} = \langle \xi_i, \eta_j \rangle$

puis un argument d'ultraproduit. Soit $\mathcal{F} = \{\text{parties finies de } G\}$: par l'hypothèse adms, on a $\forall F \in \mathcal{F} \exists H_F \in \text{Hilbert} \exists \xi_F, \eta_F: a \mapsto \langle \xi_F | h \rangle$ (en posant $\xi_F(g) = \eta_F(g) = 0$ si $g \notin F$). On a $|\xi_F(g)|, |\eta_F(g)| \leq 1$ pour $g \in G$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre plus fin que le filtre de l'inclusion sur $\mathcal{F}$, i.e. $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ tel que $\begin{cases} \text{si } A \subseteq B, A \in \mathcal{U}, \text{ alors } B \in \mathcal{U} \\ \forall A, B \in \mathcal{U} \quad A \cap B \in \mathcal{U} \\ \emptyset \notin \mathcal{U} \\ \forall A \in \mathcal{F} \exists A \in \mathcal{U} \Rightarrow A \notin \mathcal{U} \\ \forall F \in \mathcal{F} \exists F' \in \mathcal{F}: F' \supseteq F \in \mathcal{U} \end{cases}$

On considère l'ultraproduit des H_F et soit $H := \prod_{\mathcal{U}} H_F =$ quotient de $\{(\xi_F)_{F \in \mathcal{F}} : \sup |\xi_F| < \infty\}$ par $\{(\xi_F)_{F \in \mathcal{F}} : \lim_{\mathcal{U}} |\xi_F| = 0\}$. où $\lim_{\mathcal{U}} |\xi_F| = 0$ si $\forall \epsilon > 0 \exists F: |\xi_F| \leq \epsilon \in \mathcal{U}$.

Alors H comme quotient d'un espace hilbert par un idéal fermé d'un espace hilbert. On considère $\xi(g) = q((\xi_F(g))_{F \in \mathcal{F}})$ et $\eta(g) = q((\eta_F(g))_{F \in \mathcal{F}})$: on a bien $\|\xi(g)\|, \|\eta(g)\| \leq 1$. J'affirme que $\langle \xi(g) | \eta(h) \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle \xi_F(g) | \eta_F(h) \rangle = \langle q(g^{-1}h) | a \rangle$ ou $\{F \in \mathcal{F} : \{g, h\} \subseteq F\} \in \mathcal{U}$ et $\{F \in \mathcal{F} : \langle \xi_F(g) | \eta_F(h) \rangle = \langle q(g^{-1}h) | a \rangle\} \in \mathcal{U}$.

on utilise le fait suivant: si $(u_F)_{F \in \mathcal{F}}$ est une suite bornée dans $\mathbb{R}$, $\lim_{\mathcal{U}} u_F$ existe en efft, si $u_F \in \mathbb{R}, u_F \in [-M, M]$ alors on peut trouver une partition $I = \{I_k : u_F \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]\}$ pour $k = -n, \dots, n-1$. On note $k(n)$ l'indice correspondant. On a alors $\lim_{\mathcal{U}} u_F = \lim_{\mathcal{U}} \frac{k(n)}{n}$.

Ainsi, pour tout $a = (a_F)_{F \in \mathcal{F}} \in H$ et $b \in H$, $\lim_{\mathcal{U}} \langle a_F, b_F \rangle$ existe et dépend uniquement de $q(a)$ et de $q(b)$: si $q(a) = q(a')$, $\lim_{\mathcal{U}} \langle a_F, b_F \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle a'_F, b_F \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle a'_F - a_F, b_F \rangle \leq \|a_F - a'_F\| \|b_F\| \xrightarrow{\mathcal{U}} 0$.

Donc $\lim_{\mathcal{U}} \langle a_F, b_F \rangle$ définit un produit scalaire sur H .

Il est défini: $\langle q(a) | q(a') \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle a_F | a'_F \rangle = 0$ si $\lim_{\mathcal{U}} \|a_F - a'_F\| = 0 \Rightarrow a = a'$.

iii $\Rightarrow$ iv: je suppose ξ, η bornés. 1^{re} partie: l'ensemble ξ, η continus par rapport à (H, w) pour $\xi_1(g) = \text{proj}_{\text{vect}(\eta(h), h \in G)}^\perp \xi(g)$. Puis posons $\eta_1(h) = \text{proj}_{\text{vect}(\xi(g), g \in G)}^\perp \eta(h)$. Alors $\langle \xi_1(g), \eta_1(h) \rangle = \langle \xi(g) | \eta(h) \rangle = \langle \xi(g) | \eta(h) \rangle$. J'affirme que $\text{vect } \xi_1(g) = \text{vect } \eta_1(h)$: $\exists$ par def; pour $\subseteq$, soit $u \in \text{vect } \eta_1(h)^\perp \cap \text{vect } \xi_1(g)$. exercice!

continuité: $g \mapsto \langle \xi(g), \eta(h) \rangle = \varphi(g^{-1}h)$ et continue pour tout h .
 Donc $g \mapsto \xi(g)$ est continue à valeurs ds $(+)_\sigma(H, H^*)$
 et pareil pour η .

2^e étape: on considère $L^2(G, H)$, on choisit $f \in C_c(G)$ tel que $\|f\|_2 = 1$,
 $\hat{\xi}(g) \in L^2(G, H)$ tel que $\hat{\xi}(g)(g') = f(g') \xi(g'g)$
 $\hat{\eta}(g)(g') = f(g') \eta(g'g)$ et de même pour η .
 Alors $\langle \hat{\xi}(g), \hat{\eta}(h) \rangle = \int_G |f(g')|^2 \langle \xi(g'g), \eta(g'h) \rangle d\mu(g')$
 et / (R de conv. dominée) : la continuité = $\varphi(g^{-1}h) \|f\|_2^2$.
 La faible de ξ implique la continuité de $\hat{\xi}$.

coro: Soit $(e_i)_{i \in I}$ h.o.n. de H et $(\xi_i(g))_{i \in I}$ les coordonnées de $\xi(g)$.
 $\xi_i: G \rightarrow \mathbb{C}$ continue; on note $a_i \in B(L^2(G))$ l'op de $x \mapsto \xi_i(g^{-1}x)$
 $(\dots a_i \dots) \in B(L^2(G), L^2(G))$: en effet, $\sum_i a_i a_i^*$ est la mult. par $g \mapsto \|\xi_i(g)\|^2$
 $\|\sum_i a_i a_i^*\| \leq 1$. De même, $(\dots b_i^* \dots)$... $\|\sum_i b_i^* b_i\| \leq 1$.

et donc $\phi: B(L^2(G)) \rightarrow B(L^2(G))$, $s \mapsto (\dots a_i \dots) \left(\begin{smallmatrix} s \\ s \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} b_i^* \end{smallmatrix} \right)$
 définit bien une applⁿ SOT-continue. Donc sa norme CB = $(\|\sum_i a_i a_i^*\| \|\sum_i b_i^* b_i\|)^{1/2}$
 Si $s = \lambda(g)$, $\phi(s) f(h) = \sum_i \xi_i(h^{-1}) (\lambda(g) b_i^* f)(h)$
 $(b_i^* f)(g^{-1}h) = \eta_i(h^{-1}g) f(g^{-1}h)$
 $= (\sum_i \xi_i(h^{-1}) \overline{\eta_i(h^{-1}g)}) f(g^{-1}h)$
 $= \langle \xi(h^{-1}), \eta(h^{-1}g) \rangle f(g^{-1}h) = \varphi(g) f(g^{-1}h)$
 $= \varphi(g) [\chi(g) f](h)$

Donc $m_\varphi = \phi|_{VN(G)}$ et donc $\varphi \in N_0(G)$ et $\|\varphi\|_{N_0(G)} = 1$