

(1)

GT Xu

20/9/2011

Dirac: C^* -alg et représentations.
 (références: Hewitt-Ross: Abstract harmonic analysis)
G - groupe localement compact

La mesure de Haar est une mesure positive borélienne sur G invariante par translation gauche [$\forall f \in C_c(G) \forall a \in G \int f(ax) dx = \int f(x) dx$], notée dx.

- ① Elle est unique à multiple près: si μ en est une autre, alors $d\mu(x) = c dx$.
- ② La forme linéaire $C_c \rightarrow \mathbb{C}$, $f \mapsto \int f(yx^{-1}) dy$ (x fixé) défini, par unicité de la mesure de Haar, $\Delta(x)$ tel que $\int f(yx^{-1}) dy = \Delta(x) \int f$.
 Alors $\Delta: G \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$, la Δ -modulaire de G, est un morphisme continu.

Changement de variable: ① $\forall x \in G \forall f \in C_c \int f(yx) dy = \Delta(x^{-1}) \int f(y) dy$
 ② $\forall f \in C_c \int f(x^{-1}) dx = \int f(x) \frac{1}{\Delta(x)} dx$
 c'est à dire $dx^{-1} = \frac{1}{\Delta(x)} dx$.

→ les groupes compacts et discrets sont unimodulaires: $\Delta(x) = 1$.

Notation: si $a \in G$ et $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, on note $f_a(x) = f(ax)$, $f_a(x) = f(xa)$
 $\check{f}(x) = f(x^{-1})$, $\tilde{f}(x) = \overline{\check{f}(x)} = \overline{f(x^{-1})}$

$M_1 = M_1(G)$ est l'espace des mesures bornées sur G: $M_1(G) = C_c(G)^*$

Convolution: si $\mu, \nu \in M_1$, on définit $\mu * \nu: C_c(G) \rightarrow \mathbb{C}$

Involution: $d\mu^*(x) = \overline{d\mu(x^{-1})}: f \mapsto \int f(x) \overline{d\mu(x^{-1})} = \int \overline{f(x^{-1})} d\mu(x)$
 $f \mapsto \int_{G \times G} f(xy) d\mu * \nu(x, y)$
 $= \int \overline{f(x^{-1})} d\mu(x) = \int \int f(xy) d\mu(x) d\nu(y)$
Unité: δ_e
 $= \langle \mu, \tilde{f} \rangle$

M_1 est ainsi devenu une algèbre de Banach unitaire involutive.

$L_1 = L_1(G)$ est une sous-algèbre ^{de Banach} involutive: $L_1 \hookrightarrow M_1$
 $f \mapsto f(x) dx = d\mu(x)$

On a $\int g d\mu^*(x) = \int \overline{g(x^{-1})} d\mu(x) = \int \overline{g(x)} \overline{f(x^{-1})} \frac{1}{\Delta(x)} dx$.

Donc $d\mu^*(x) = \frac{\tilde{f}}{\Delta} dx$ et donc l'involution s'écrit $f^* = \tilde{f} \Delta^{-1}$.

De plus, L_1 a une unité approchée: si K est compact ^{un voisinage} de e dans G et $u_K \in C_c$ tel que $\int u_K = 1$, alors $(u_K)_{K \in \mathcal{V}(e), K \text{ compact}}$ est une unité approchée.

(2)

On a donc $\forall f \in L_1 \quad u_k * f \longrightarrow f$ et $f * u_k \longrightarrow f$; en fait, $u_k \xrightarrow{w^*} \delta_e$

Algèbre de $\mathcal{VN}$ de G : considérons les représentations unitaires (supposées continues) de G sur H , c'est-à-dire les morphismes de groupe $\pi: G \rightarrow \mathcal{U}(H)$.

$\hookrightarrow$ continuité forte: $\forall \xi \in H \quad G \longrightarrow H$ et continue
 $x \longmapsto \pi(x)\xi$

elle équivaut (p.e. rep.) à la continuité faible: $\forall \xi, \eta \in H \quad x \mapsto \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle$ continue.

- La représentation à gauche est $\lambda: G \longrightarrow \mathcal{U}(L_2)$
 $x \longmapsto \lambda(x) \cdot f \longmapsto x^{-1}f$
- Toute représentation π s'étend à une rep de M_1 .

$$\forall \mu \in M_1 \quad \pi(\mu) = \int_G \underbrace{\pi(x)}_{\in B(H)} d\mu(x), \text{ c'est-à-dire}$$

$$\pi(\mu)(\xi) = \int_G \left(\pi(x) \xi \right) d\mu(x).$$

- On obtient ainsi λ à L^1 : $\forall f \in L^1 \quad \lambda(f): L_2 \longrightarrow L_2$

$$\text{Calculons: } \lambda(f)(g)(x) = \int \underbrace{(\lambda(y)g)(x)}_{g(y^{-1}x)} f(y) dy = \int \lambda(y)g(x) f(y) dy = f * g(x)$$

$$\text{Donc } \lambda(f)g = f * g.$$

De plus, λ est fidèle sur L^1 (utilise les unités approchées)

Def: $C_2^*(G) = \overline{\lambda(L_1)}^{(B(L_2), \|\cdot\|)}$ est la C^* -algèbre réduite de G

• $\mathcal{VN}(G) = \overline{\lambda(L_1)}^{(B(L_2), w^*)}$ est l'algèbre de von Neumann de G

Il y a aussi une rep-à droite $\rho: G \longrightarrow \mathcal{U}(L_2)$ d'abord définie par $\rho(x)(f)(y) = f(yx) = f_x(y)$.

$$\text{Calculons: } \int \|f_x\|^2 dy = \int \|f(yx)\|^2 dy = \Delta(x^{-1}) \int \|f(y)\|^2 dy$$

Changeons la définition de ρ pour la rendre unitaire: on pose

$$\rho(x)(f)(y) = \sqrt{\Delta(x)} f(yx) = \sqrt{\Delta(x)} f_x(y).$$

$$\text{Calculons encore: } \rho(f)(g)(x) = \int \underbrace{(\rho(y)g)(x)}_{\sqrt{\Delta(y)} g(xy)} f(y) dy$$

$$= \int \sqrt{\Delta(x^{-1}z)} g(z) f(x^{-1}z) dz = g * \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta}} f \right) \quad \text{Posons } z = xy$$

(3)

$$VN' = \{T \in B(L_2) : \forall S \in VN \quad TS = ST\} = \mathcal{F}(G)''$$

Si le groupe π est par un modulaire, la mesure de Haar ne définit pas une trace.

$$\text{Définissons } w_0(\overbrace{\lambda(f) \lambda(f)^*}^{\lambda(f+f^*)}) = f * f^*(e) = \int f(y) \overbrace{f^*(y^{-1})}^{\frac{1}{\Delta(y)} \overline{f(y)}} dy = \int |f(y)|^2 \Delta(y) dy$$

Alors w_0 s'étend en un poids sur VN , normal, semi-fini, fidèle:

Def: $w : VN_+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ est un poids si

$$\textcircled{1} \quad w(x+y) = w(x) + w(y) \quad \text{si } x, y \in VN_+$$

$$\textcircled{2} \quad w(\alpha x) = \alpha w(x) \quad \text{si } \alpha \geq 0.$$

Si $w(1) < \infty$, cela définit en fait une f.l. positive continue.

w est normal si $\forall (x_i); \uparrow x$ dans $VN_+ \quad w(x) = \sup w(x_i)$.

w est semi-fini si $\forall x \in VN_+ \setminus \{0\} \exists y \in VN_+ \setminus \{0\} \quad y \leq x$ et $w(y) < \infty$.

w est fidèle si $w(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

w est tracial si $w(xx^*) = w(x^*x)$ pour $x \in VN$.

→ Faisons un calcul: $w_0(\lambda(f)^* \lambda(f)) = f^* * f(e) = \int \overbrace{f^*(y)}^{\frac{1}{\Delta(y)} \overline{f(y')}} f(y^{-1}) dy$

Donc w_0 est tracial si et seulement si $\Delta \equiv 1$. $\int |f(y^{-1})|^2 \Delta(y^{-1}) dy = \int |f(y)|^2 dy$

$VN_+^*(G)$ est le préduel de $VN(G)$

Prendons $w : VN \rightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire normale [continue pour la topologie ultrafacile]. On définit une fonction $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C} \quad x \mapsto w(\lambda(x))$

Alors φ est continue et bornée.

Supposons de plus $w \geq 0$: Alors $\forall x_1, \dots, x_n \in G \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_i \overline{\alpha_i} \alpha_j \overbrace{\varphi(x_i^* x_j)}^{w(\lambda(x_i)^* \lambda(x_j))} = w(\sum_i \overline{\alpha_i} \alpha_j \lambda(x_i)^* \lambda(x_j)) = w((\sum_i \alpha_i \lambda(x_i))^* (\sum_j \alpha_j \lambda(x_j)))$$

Donc $(\varphi(x_i^* x_j))$ est définie positive: on dit que φ est définie positive.

On a en fait: $w \geq 0 \Leftrightarrow \varphi$ def. pos.

(On suppose toutes fonctions définies positives bornées et continues.)

(4)

Une autre formule :

$$\forall f \in C_c \quad \omega(\lambda(f)) = \omega \left(\int \lambda(u) f(u) du \right) = \int \omega(\lambda(u)) f(u) du$$

$$= \int \varphi(u) f(u) du$$

dualité entre L^1 et L^∞

Faisons un petit calcul : $\begin{pmatrix} \varphi(e) & \varphi(u) \\ \varphi(u^{-1}) & \varphi(e) \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \underline{\varphi(e) \geq 0} \text{ et } \underline{\varphi(u^{-1}) = \overline{\varphi(u)}} \text{ et } \underline{|\varphi(u)| \leq \varphi(e)}$

Fonctions définies positives : Les propriétés suivantes sont équivalentes :

① φ d.p.

② $\forall \mu \in M_1 \quad \langle \mu * \mu^*, \varphi \rangle \geq 0$

③ $\forall f \in L_1 \quad \int \varphi(u^{-1}y) \overline{f(u)} f(y) du dy \geq 0$

④ $\exists \omega$ f.l. pos. ^{continue} sur L_1 $\langle \varphi, f * f^* \rangle = \omega(f * f^*)$ pour $f \in L_1$

⑤ $\exists \pi$ rep. unitaire de G sur H $\exists \xi \in H \quad \varphi(x) = \langle \pi(x)\xi, \xi \rangle$

$\rightarrow$ On a $\langle \mu * \mu^*, \varphi \rangle = \int \varphi(u^{-1}y) \overline{\phi_\mu(u)} \phi_\mu(y) du dy$

et ② $\Leftrightarrow$ ③ par l'utilisation d'une unité approchée pour régulariser.

① $\Leftrightarrow$ ② $\checkmark$ ③ $\Rightarrow$ ④ $\checkmark$ puisque $\varphi \in L^\infty$

④ $\Leftrightarrow$ ⑤ : par la construction GNS, ω définit une rep. continue cyclique de L^1 , notée (π, H, ξ) , telle que $\omega(f) = \langle \pi(f)\xi, \xi \rangle$. Alors π provient d'une rep. unitaire de G . On peut appliquer la formule de ④ avec " $f = \delta_e$ " ou plutôt ($f = u_k$) unité approchée.

④ veut dire que pour une "bonne" f , $\omega(f) = \varphi(f) = \int \varphi f$.

et ainsi, $\varphi(f) = \langle \pi(f)\xi, \xi \rangle$

Or δ_n est la limite préfaible d'une suite de f_i dans M_1 .

Donc $\pi(x) = \lim \pi(f_n)$.

⑤ $\Rightarrow$ ① et réciproquement.

Définition : $\varphi \in \boxed{B(G)}$ si $\exists (\pi, H) \exists \xi, \eta \in H \quad \forall x \in G \quad \varphi(x) = \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle$
 On munit $B(G)$ de $\|\varphi\| = \inf \{ \|\xi\| \|\eta\| : (\pi, H), \xi, \eta \text{ tels que ci-dessus} \}$
 Exercice : $B(G)$ est une algèbre de Banach involutive muni du produit ponctuel engendrée par le cône des fonctions définies positives.