

2^e partie de l'exposé de Xu

On définit $B(G) = \{ \varphi: G \rightarrow \mathbb{C} : \exists \pi: G \rightarrow \mathcal{U}(H) \text{ rep. unitaire continue} \}$
 $\exists \xi, \eta \in H \quad \varphi(u) = \langle \pi(u) \xi, \eta \rangle \}$
 muni de la norme $\|\varphi\| = \inf \|\xi\| \|\eta\|$

On définit la C^* -algèbre (pleine) de G : $C^*(G)$ ainsi:

- toute rep. unitaire π de G sur H s'étend en une rep. continue de $L^1(G)$ ds $B(H)$ par la f^ule suivante: $\pi(f) = \int_G f(u) \pi(u) du$: π est non dégénérée et toute rep. non dégénérée de $L^1(G)$ provient d'une rep. de G .
- La rep. universelle $\pi: L^1(G) \hookrightarrow B(\bigoplus \{ H_\pi : (\pi, H_\pi) \text{ rep. unitaire de } G \})$
 $f \longmapsto \bigoplus_\pi \pi(f)$

et on définit alors la C^* -norme $\|f\|_{C^*} = \sup_\pi \|\pi(f)\|_{B(H_\pi)} \text{ sur } L^1(G)$;
 $C^*(G)$ est alors le complété de $(L^1(G), C^*)$

Th: $(C^*(G))^* = B(G)$

Dém: si $\varphi \in B(G)$, $\|\varphi\|_{B(G)} < 1$ provient d'une rep. $\pi: G \rightarrow \mathcal{U}(H)$

et des vecteurs $\xi, \eta \in H$ tels que $\|\xi\|, \|\eta\| < 1$ et $\varphi(u) = \langle \pi(u) \xi, \eta \rangle$.

Alors $\forall f \in L^1(G) \quad \omega_\varphi(f) = \int_G \overbrace{\varphi(u)}^{\langle \pi(u) \xi, \eta \rangle} f(u) du = \langle \underbrace{\int_G \pi(u) f(u) du}_{\pi(f)} \xi, \eta \rangle$

Donc ω_φ s'étend en une forme linéaire continue $\|\omega_\varphi\| \leq \|\varphi\|_{C^*}$ sur $C^*(G)$ de norme ≤ 1 .

Inversement, toute f.l. sur $C^*(G)$ provient d'une rep. unitaire:

Soit $\omega \in (C^*(G))^*$ et supposons $\omega \geq 0$: soit (π, H, ξ) la rep. G.N.S. de $C^*(G)$ associée à ω . Alors $\pi|_{L^1(G)}$ est une rep. continue cyclique (donc non dégénérée: on utilise ici l'existence d'une unité approchée sur $L^1(G)$)

($\pi(f) = \int \pi(u) f(u) du$ pour $\pi: L^1 \rightarrow B(H)$ donne pluss. $\{\pi(f)\xi: f \in L^1(G), \xi \in H\}$ et son enveloppe linéaire est dense ds H : cette rep. est bien non dégénérée sur $H_1(G)$ et on approche alors ξ par une unité approchée $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ compactée telle que $u_i \geq 0$, nulle hors de i , continue, $\int u_i = 1$; et alors $\pi(u_i) \rightarrow \text{Id}$ pr la top. d'op. faible.)

Fait. toute rep non dégénérée de $L^1(G)$ sur H provient d'une unique rep. unitaire continue de G sur H : on définit pour $\xi \in G, f \in L^1(G), \xi \in H$:
 $\pi(u)(\pi(f)\xi) = \pi(\underbrace{\delta_u * f}_{\text{c'est toujours } f \text{ de } L^1})(\xi)$. Prenons $f = u_i$. On a
 moralement, $\pi(\delta_u)$

$\delta_u * u_i * f \rightarrow \delta_u * f$ dans L^1 . Par continuité de π sur $B(H)$, on a

$\pi(u_i * \delta_u * f) \rightarrow \pi(\delta_u * f)$ dans $B(H)$ et donc

$$\begin{aligned} \|\pi(\delta_u * f)\xi\| &\leq \sup_i \|\pi(u_i * \delta_u * f)\xi\| \\ &\leq \sup_i \|\pi(u_i * \delta_u)\| \|\pi(f)\xi\| \\ &\leq \sup_i \underbrace{\|u_i * \delta_u\|_1}_1 \|\pi(f)\xi\| \end{aligned}$$

(On aurait aussi pu arguer sur le produit scalaire !)

Donc $\pi(u)$ s'étend en une contraction sur H .

Il est évident que $\pi: G \rightarrow B(H)$ est une rep. continue.

D'autre part, $\pi(u)^{-1} = \pi(u^{-1})$ est aussi contractant. Donc $\pi(u)$ est unitaire.

On a bien une π si on pose alors $\pi'(f) = \int \pi(u) f(u) du$,

$$\begin{aligned} \text{alors } \int g(u) \pi(u) (\pi(f)\xi) &= \pi'(g)(\pi(f)\xi) \\ \int g(u) \pi(\delta_u * f)\xi &= \pi(g * f)(\xi) \end{aligned}$$

et on prouve ainsi $\pi'(f) = \pi(f)$. Cela prouve l'unicité.

Revenons à notre problème: $w(T) = \langle \pi(T)\xi, \xi \rangle$ pour $T \in C^*(G)$.

π induit une rep. unitaire de G sur H notée π . Posons $\varphi(u) = \langle \pi(u)\xi, \xi \rangle$.

Alors φ est une f^+ de type positif continue sur G . Pour tout $f \in L^1(G)$ on a $w(\pi(f)) = \langle \pi(f)\xi, \xi \rangle = \int \langle \pi(u)\xi, \xi \rangle f(u) du = \int_G \varphi(u) f(u) du$.

De plus, $\|\varphi\|_{B(G)} \leq \|\xi\|^2 = \|w\|_{C^*(G)}^*$.

Car général: tout $w \in (C^*(G))^*$ s'écrit $w = u(|w|)$, où u est une fonction partielle sur $B(\otimes \dots)$ [$C^*(G)^*$ est le prédual d'une algèbre de von Neumann, ce qui permet de faire cette décomposition]

$$\begin{aligned} \text{Alors } |w|(T) &= \langle \pi(T)\xi, \xi \rangle \text{ et } w(T) = u(|w|)(T) = |w|(T\xi) = \langle \pi(T\xi)\xi, \xi \rangle \\ &= \langle \pi(T)(\pi(u)\xi), \xi \rangle \end{aligned}$$

(ici, on considère en fait π^{**} biadjoint de π , rep de $C^*(G)^{**}$)

Algèbre de Fourier $A(G)$: le prédual de $VN(G)$.

Xu 4/10/2011
(3)

$\lambda(x)f = f(x^{-1}\cdot)$ pour $f \in L^2(G)$

Si $h \in L^1(G)$, $\lambda(h)f = h * f$. Soit $x \in G$ et $f, g \in L^2$.

$$\begin{aligned} \langle \lambda(x^{-1})f, g \rangle_{L^2} &= \int \underbrace{(\lambda(x^{-1})f)(y)}_{f(xy)} \overline{g(y)} dy \\ &= \int f(y) \overline{g(x^{-1}y)} dy \quad \text{car } y = x^{-1}z \\ &= \int f(y) \tilde{g}(y^{-1}x) dy \quad (\text{Rappel: } \tilde{g}(y) = \overline{g(y^{-1})}) \\ &= f * \tilde{g}(x) \end{aligned}$$

Définition: $A(G) = \overline{\text{span} \{ f * \tilde{g} : f, g \in L_2(G) \}}^{\|\cdot\|_{B(G)}}$
 $= \overline{\text{span} \{ f * \tilde{g} : f, g \in C_c(G) \}}^{\|\cdot\|_{B(G)}}$

(On va démontrer qu'en fait $A(G) = \{ f * \tilde{g} : f, g \in L_2(G) \}$

Th: $A(G) = VN(G)_*$. [cela équivaut à $A(G)^* = VN(G)$ par un isomorphisme] et $\|h\| = \inf \|f\|_{L_2(G)} \|g\|_{L_2(G)}$

Dem: Soit $T \in VN(G)$. Prenons $h \in L_1(G)$ et posons $T = \lambda(h)$.

Prenons $f, g \in L_2(G)$: $\langle \underbrace{Tf}_{h*f}, g \rangle = \int \underbrace{(Tf)(x)}_{h*f(x)} \overline{g(x)} dx = \int \int h(y) f(y^{-1}x) \overline{g(x)} dy dx$
 (Fubini!)
 $= \int h(y) dy \int \underbrace{f(y^{-1}x)}_{\tilde{f}(x^{-1}y)} \overline{g(x)} dx$

(Rappel: $(f+g)^v = g^v + f^v$)
 $\tilde{g} * \tilde{f}(y) = \overline{(f * g)^v}(y)$

Donc $\langle Tf, g \rangle = \int h (f * \tilde{g})^v$. On va donc définir

$\omega_T((f * \tilde{g})^v) = \langle Tf, g \rangle$. A-t-on $|\langle Tf, g \rangle| \leq \|T\|_{VN(G)} \|f * \tilde{g}\|_{L_2(G)}^v$?

Si $T = \lambda(h)$ avec $h \in L^1(G)$, alors $|\omega_T((f * \tilde{g})^v)| \leq \int |h|$

[Parenthèse sur $C_\lambda^*(G)$ C^* -algèbre réduite de G : $C_\lambda^*(G) = \overline{\lambda(L_1(G))}^{\|\cdot\|_{B(G)}}$

(On peut aussi poser $C_\pi^* = \overline{\pi(L^1(G))}^{\|\cdot\|_{B(L_2(G))}}$ On a $\ker \pi = \{0\}$)

On a une appl^{lin} quotient $C^*(G) \rightarrow C_\lambda^*(G)$ et donc $C_\lambda^*(G) = C^*(G)/\mathcal{I}$.

et donc $(C_\lambda^*(G))^* \overset{\text{isométrique}}{\hookrightarrow} B(G)$.

On a $|\int h \phi| \leq \| \lambda(h) \|_{C_\lambda^*(G)} \| \phi \|_{B_\lambda(G)}$ car $\phi \in B_\lambda(G)$: ϕ a un coeff⁶ de λ .
 $= \| \lambda(h) \|_{C_\lambda^*(G)} \| \phi \|_{B(G)}$

Donc, si $T = \lambda(h)$ avec $h \in L^1(G)$, alors $|\omega_T((f * \tilde{g})^v)| \leq \| \lambda(h) \|_{VN} \| \phi \|_{A(G)}$

Pour $T \in VN(G)$ quelconque, par le th de Kaplansky, $\lambda(L_1(G))$ est w^* -dense dans $VN(G)$: il existe (h_i) dans $L_1(G)$ telle que $\lambda(h_i) \xrightarrow{w^*} T$ et $\|h_i\| \leq \|T\|$.

Donc $|\langle Tf, g \rangle| = \lim |\langle \lambda(h_i) f, g \rangle| \leq \|T\| \|f * \tilde{g}\|_{A(G)}$

Donc w_T s'étend à une f.l. sur $A(G)$ de norme $\leq \|T\|$.

Réciproquement, soit $w \in A(G)^*$. On considère $\Phi: L_1(G) \times L_1(G) \rightarrow \mathbb{C}$
 $(f, g) \mapsto w(f * \tilde{g})^\vee$

Φ est sesquilinéaire continue et $|w(f * \tilde{g})^\vee| \leq \|w\| \|f * \tilde{g}\|_{A(G)} \leq \|w\| \|f\|_1 \|\tilde{g}\|_1$

Donc il existe $T \in B(L_2(G))$ tel que $\|T\| \leq \|w\|$ et $\langle Tf, g \rangle = w(f * \tilde{g})^\vee$

Il reste à voir $T \in VN(G)$ c'est que T commute aux convolutions à droite

Soit $h \in C_c(G)$. A-t-on $(Tf) * h = T(f * h)$? On a

$$\langle T(f * h), g \rangle = w((f * h * \tilde{g})^\vee) = \langle Tf, \widetilde{h * \tilde{g}} \rangle$$

Or $h * \tilde{g} = g * \tilde{h}$. De plus, $\widetilde{h * \tilde{g}} = \widetilde{g * \tilde{h}} = \widetilde{g} * \tilde{\tilde{h}} = \tilde{\tilde{h}} * \tilde{g} = \tilde{h} * g$
car $\widetilde{f * g} = \tilde{g} * \tilde{f}$ et $\widetilde{\tilde{f}} = f$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \widetilde{h * \tilde{g}} &= \tilde{h} * g = \int \Delta^{\frac{1}{2}} \tilde{h}(x) g(y) dx dy \\ &= \int \int \Delta^{\frac{1}{2}} \tilde{h}(x) g(y) \Delta^{\frac{1}{2}}(x^{-1}y) dx dy = \int \int \tilde{h}(x) g(y) dx dy \\ &= \langle (Tf) * \tilde{h}, g \rangle = \langle Tf, h * \tilde{g} \rangle \end{aligned}$$

$A(G)$ est appelée l'algèbre de Fourier. Pourquoi est-ce une algèbre?
 Il y a une autre déf. de $A(G)$: $A(G) = \overline{\text{span} \{f * \tilde{g} : f, g \in C_c(G)\}}^{B(G)}$
 $= \overline{\text{span} \{f * \tilde{f} : f \in C_c(G)\}}^{B(G)}$

Or $f * \tilde{f}$ est def. positive de support compact, coeff de la rég. gauche.

Notons $P(G)$ les f^* définies positives continues: $A(G) \subset \overline{\text{span } P(G)}^{B(G)}$
 algèbre.

Il y a en fait égalité!

Fait: si $f \in P(G) \cap C_c(G)$, il existe $h \in L_2(G)$ tel que $f = h * \tilde{h}$.

La conclusion reste valable pour $f \in P(G) \cap L_2(G)$ [Godement]

explication: si G abélien: $f \in P(G) \cap L_2(G) \Rightarrow \hat{f} \in \Pi_1(\hat{G}) \cap L_2(\hat{G}) = L_2(\hat{G}) \cap L_2(\hat{G})$

Or $\hat{f} = \hat{f}^{1/2} \hat{f}^{1/2}$ avec $\hat{f}^{1/2} \in L_2(\hat{G})$. Donc $f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}^{1/2} \hat{f}^{1/2}) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}^{1/2}) * \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}^{1/2})$

f définie positive équivaut à $\forall g \in C_c(G) \quad \langle g * f, g \rangle_{L_2(G)} = \int g * f(x) \overline{g(x)} dx \geq 0$

Ceci équivaut à $C_f: L_2 \rightarrow L_2$ défini par $g \mapsto g * f$ est un opérateur positif, et donc $C_f = (C_f^{1/2})^2 \geq 0$

Donc $C_f \in \mathcal{B}(A)''$ et $C_f^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}(A)''$.

Donc $C_f^{\frac{1}{2}}(g) = g * h$ avec $h \in L_2(G)$ et h aussi déf positive et h est également une fⁿ continue : $h \in L_2(G) \cap P(G)$

Donc $g * f = C_f(g) = C_f^{\frac{1}{2}}(C_f^{\frac{1}{2}}(g)) = g * h * h$ et $f = h * h$.

Donc $A(G)$ est une algèbre !

Ph: $g \mapsto g * f$ n'est pas borné sur $L_2(G)$: il est fermé à domaine dense et il faut travailler sur sa fermeture.

Th: $A(G) = \{ f * \tilde{g} : f, g \in L_2(G) \}$ [Eymard, beaucoup d'écritures]

Comment le comprendre? T est normal de $VN(G)$ et un état vectoriel: "spatial"

si ω est normal, $\omega(T) = \langle T f, f \rangle$ avec un $f \in L_2(G)$
et alors $\varphi_{\omega} = f * \tilde{f}$

Dans le cas où G est unimodulaire, voire discret, $L_2(G) \cong L_2(VN(G))$
 $A(G) \cong L_1(VN(G))$

et on voit que les elt de L_1 s'écrivent comme
produit de deux elt de L_2 : $\forall \varphi \in L_1(VN(G)) \exists \psi, \chi \in L_2(VN(G)) \varphi = \psi \chi$ et $\|\varphi\|_{L_1(VN(G))} = \|\psi\|_{L_2(VN(G))} \|\chi\|_{L_2(VN(G))}$

Le a.VN sous forme standard est telle que H est normal et vectoriel.

Il reste à montrer que $VN(G)$ est l'alg. de convolution à gauche
dont le commutant est à droite.

Abandon à la semaine dernière: le groupe affine de $\mathbb{R}$ est non
unimodulaire et $VN = \mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}_+) \oplus L_2(\mathbb{R}_+))$: donc VN n'est pas de type II
 $A(G) = S^1$ ("anti")

→ ce groupe a est 2 rep de dim ∞ .

→ article de Khalil, Studia 74.