

Analyse harmonique sur le groupe de Lie $\rightarrow$ Helgason

- $\rightarrow$ Cornwell: Gp theory in Physics
- $\rightarrow$ S-P Serre: Alg. $\frac{1}{2}$ types complexes.
- $\rightarrow$ Samuelson: NHe
- $\rightarrow$ Wigner, Flenberg

Un groupe de Lie est une variété avec une structure de groupe compatible avec la structure différentiable: $\cdot g \mapsto g^{-1}$ et différentiable (∞)
 $\cdot (g, h) \mapsto gh$

Prop: Si G est connexe et U voisinage de e , alors $\forall g \in G \exists g_1, \dots, g_n \in U$

Dém: on a $\{g_1, \dots, g_n : n \in \mathbb{N}, g_1, \dots, g_n \in U\}$ et ouvert-fermé, où $g = g_1 \dots g_n$.
 on peut supposer que $U = U^{-1}$ et que U est ouvert.

Si M est une variété et $P \in M$, un vecteur tangent en P est un opérateur sur $C^\infty(M)$ de la forme $\underbrace{X'(0)}_{\text{vecteur tangent}} : f \mapsto \frac{d}{dt} (f \circ \underbrace{\gamma}_{\text{chemin } \gamma: \mathbb{R} \rightarrow M \text{ tel que } \gamma(0)=P})$

Un champ de vecteurs est la donnée d'un vecteur en chaque point (de façon C^∞)

Soit G un groupe de Lie: on peut alors concevoir une action de G sur un vecteur X : $dL_g(X) = \frac{d}{dt} (g X(t))$
 $\in T_{gh} G$ si $X \in T_e G$

On dit que le champ X est invariant à gauche si $\forall h \in G \ dL_h X_h = X_{gh}$.
 $(dL_g X)(t) = \frac{d}{dt} (f(g X(t))) = \frac{d}{dt} ((L_g f)(X(t))) \Big|_{t=0}$

Si $X \in T_e G$, on définit le champ X^L par $X^L_g(t) = \frac{d}{dt} (f(g X(t)))$
 $dL_g X^L_g = \frac{d}{dt} (L_g X^L_g(t)) = \frac{d}{dt} (L_g X(t))$

Exponentielle: Soit $X \in T_e G$ et X^L son champ de vecteurs associé

Soit $\alpha_X : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ la courbe intégrale de X^L . Alors
 $\forall t_0 \in \mathbb{I} \ \frac{d}{dt} (\alpha_X(t+t_0)) \Big|_{t=0} = X^L_{\alpha_X(t_0)}$

Théorème: Le domaine de α_x est $\mathbb{R}$

Dém.: Si α est une courbe intégrale de X_L , alors $\alpha_1(t) = y\alpha(t)$ ($y \in G$) est une courbe intégrale de X^L dont le point de départ est y .

• Si $y = \alpha_x(t_0)$, le domaine de α_1 est $I - t_0$. Or le domaine de α_1 est le même que celui de α_x (parce que $\alpha(t) = \alpha_x(t_0)\alpha_x(t)$).

Donc $I = \mathbb{R}$. Sans surprise, on a la formule $\forall t, s \in \mathbb{R} \quad \alpha_x(t+s) = \alpha_x(t)\alpha_x(s)$.

Def: exp: $T_e G \rightarrow G$
 $X \mapsto \alpha_x(1)$

Définissons l'adjoint: $\text{Ad}(g): G \rightarrow G$
 $h \mapsto ghg^{-1}$ (pensez à un groupe de matrices)

Soit $h(t)$ un chemin dans G avec $h(0) = e$: $h'(0) \in T_e G$.

$$\frac{d}{dt} \left(\underbrace{g h(t) g^{-1}}_{= e \text{ si } t=0} \right) = g h'(0) g^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ad}(g) h'(0).$$

↑
vrai si groupe de matrices

Si g est aussi un chemin dans G , on a $\frac{d}{du} \frac{d}{dt} (g(u) h(t) g(u)^{-1}) = g'(0) h'(0) - h'(0) g'(0)$
 $= [g'(0), h'(0)]$

Prenez-nous un exemple: $SO(2)$. $SO(n) \subset M_n$ est le groupe spécial orthogonal: ses éléments satisfont $\det = 1$, $AA^t = \text{Id}$.

Prenez $\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$. C'est un chemin dans $SO(2)$.

La dérivée en $t=0$ est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: c'est une matrice antisymétrique.

Plus généralement: $A(t)A(t)^t = \text{Id}$ donne $A'(0)A(0)^t + A(0)\underline{A'(0)^t} = 0$

et donc $A'(0) + A'(0)^t = 0$ et A' est antisymétrique

Considérons $\text{Ad}(g) = ghg^{-1}$
 $\text{Ad}(g)X = gXg^{-1}$

Calculons avec $g = \begin{pmatrix} -\cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ← noté selon l'axe z et $X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On obtient $gXg^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a \cos t & b \cos t \\ -a & 0 & -b \sin t \\ -b \cos t & b \sin t & 0 \end{pmatrix}$

Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ muni d'une application bilinéaire $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ telle que :

- $[X, Y] = -[Y, X]$
- $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (identité de Jacobi)

(version abstraite de la dérivée seconde de Ad)

Notation : $\text{ad}(X): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$
 $Y \mapsto [X, Y]$

Forme de Killing: $B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(X, Y) \mapsto \text{Tr}(\text{ad } X \circ \text{ad } Y)$
 $= \text{tr}(XY)$ si on est sur $T_e G$ où G est un groupe de matrices.

Si $\mathfrak{g} = T_e G$, alors B se prolonge en forme bilinéaire sur TM par $B_g(X_g, Y_g) = B(dL_{g^{-1}}X_g, dL_{g^{-1}}Y_g)$
 $= dL_g^* B = L_g^* B.$

Une algèbre de Lie est semi-simple si elle ne contient pas de sous-algèbre invariante abélienne :
 $\forall x \in \mathfrak{g}, [x, x] = 0$

Théorème : Une algèbre est semi-simple ssi B est non dégénérée.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, on pose $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^{n+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^n]$

Def. : Une algèbre est nilpotente si $\exists n \in \mathbb{N} \mathfrak{g}^n = \{0\}$.

• Un élément X est ad-nilpotent si $\text{ad } X$ est nilpotent : $(\text{ad } X)^n = 0$

Th de Engel : Une algèbre est nilpotente si et seulement si $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\text{ad } X$ est nilpotent.

Algèbre de Cartan : Notons, pour $A \in \mathfrak{g}$, $Z(A) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, A] = 0\}$.

C'est le centralisateur de A . Une sous-algèbre $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{g}$ est Cartan

si elle est nilpotente et son propre centralisateur : $[\mathfrak{g}, \mathfrak{H}] \subset \mathfrak{H} \iff \mathfrak{g} = \mathfrak{H}$

Le rang de $\mathfrak{g}$ est la dimension de $\mathfrak{H}$.

Définition alternative : $\mathfrak{H}$ est de Cartan si elle est maximale et abélienne + (dans le cas semi-simple) que tous les $\text{ad}(H)$, $H \in \mathfrak{H}$, sont diagonalisables $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$.

On va maintenant supposer que $\mathfrak{g}$ est semi-simple sur $\mathbb{C}$.

th de décomposition primaire :

Si $A: V \rightarrow V$ est un opérateur linéaire, $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V_{\lambda}(A)$ où
 $V_{\lambda}(A) = \{v \in V: (A - \lambda \text{Id})^n v = 0 \text{ pour un certain } n\}$.

Pour $X \in \mathfrak{g}$ on définit $\mathfrak{g}_{\lambda}(X) = \{Y \in \mathfrak{g}: (\text{ad } X - \lambda \text{Id})^n Y = 0\}$

On a $[\mathfrak{g}_{\lambda}(X), \mathfrak{g}_{\mu}(X)] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}(X)$ et $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda} \mathfrak{g}_{\lambda}(X)$ sinon vide

↳ Soit $X_{\lambda} \in \mathfrak{g}_{\lambda}(X), X_{\mu} \in \mathfrak{g}_{\mu}(X)$. A-t-on $(\text{ad } X - (\lambda + \mu) \text{Id})[X_{\lambda}, X_{\mu}] = 0$?

$$\begin{aligned} (\text{ad } X - (\lambda + \mu) \text{Id})[X_{\lambda}, X_{\mu}] &= [X, [X_{\lambda}, X_{\mu}]] + [X_{\lambda}, [X, X_{\mu}]] - \lambda[X_{\lambda}, X_{\mu}] - \mu[X_{\lambda}, X_{\mu}] \\ &= [\underbrace{[X, X_{\lambda}]}_{= (\text{ad } X - \lambda)X_{\lambda}}, X_{\mu}] + [X_{\lambda}, \underbrace{[X, X_{\mu}]}_{= (\text{ad } X - \mu)X_{\mu}}] - \lambda[X_{\lambda}, X_{\mu}] - \mu[X_{\lambda}, X_{\mu}] \\ &= [(\text{ad } X - \lambda)X_{\lambda}, X_{\mu}] + [X_{\lambda}, (\text{ad } X - \mu)X_{\mu}] \end{aligned}$$

$$(\text{ad } X - (\lambda + \mu) \text{Id})^n [X_{\lambda}, X_{\mu}] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [(\text{ad } X - \lambda)^k X_{\lambda}, (\text{ad } X - \mu)^{n-k} X_{\mu}]$$

et donc tous les termes finissent par s'annuler.

Def Un élément $X \in \mathfrak{g}$ est régulier si $\dim \mathfrak{g}_0(X)$ est minimal parmi les $\dim \mathfrak{g}_0(Y)$.

Prop : Si X est régulier, alors $\mathfrak{g}_0(X)$ est Cartan.

Dem: Il faut montrer que $\forall Y \in \mathfrak{g}_0(X) \text{ ad}(Y)^n = 0$

$$\cdot \mathbb{Z}(\mathfrak{g}_0(X)) = \mathfrak{g}_0(X).$$

• Pour tout $Y \in \mathfrak{g}_0(X)$, $\text{ad}(Y)$ agit sur $\mathfrak{g}_{\lambda}(X)$, $\lambda \neq 0$.

• Les valeurs propres de $\text{ad } Y|_{\mathfrak{g}_{\lambda}(X)}$ sont λ .

Donc $\text{ad } Y$ est non dégénérée.

Pour chaque λ on prend un voisinage $\mathcal{U}_{\lambda}$ de X dans $\mathfrak{g}_0(X)$

tel que $\text{ad } Y|_{\mathfrak{g}_{\lambda}(X)}$ est non dégénérée, $Z \in \mathcal{U}_{\lambda}$.

Prendons $\mathcal{U} = \bigcap_{\lambda} \mathcal{U}_{\lambda}$. Soit $Y \in \mathcal{U}$. On veut que $\text{ad } Y$ soit nilpotent sur tous les $\mathfrak{g}_{\lambda}(X)$, c'est-à-dire $(\text{ad } Y)^n X_{\lambda} = 0 \Rightarrow X_{\lambda} \in \mathfrak{g}_0(X)$.

Or $\mathfrak{g}_0(Y) \subset \mathfrak{g}_0(X)$. $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda} \mathfrak{g}_{\lambda}(X)$. Or $\mathfrak{g}_0(X)$ est minimal.

Donc $\mathfrak{g}_0(Y) = \mathfrak{g}_0(X)$. Donc $\text{ad } Y$ nilpotent sur $\mathfrak{g}_0(X)$.

5

Donc $\forall Y \in \mathcal{G}_0(X)$ $\text{ad } Y$ nilpotent sur $\mathcal{G}_0(X)$.

Donc Engel permet de conclure que $\mathcal{G}_0(X)$ est ad-nilpotent et donc nilpotent.

. Montrons à présent que $\mathcal{G}_0(X)$ est son propre centralisateur :

$\mathcal{G}_0(X) \subset \mathcal{Z}(\mathcal{G}_0(X))$ parce que $\mathcal{G}_0(X)$ est une algèbre.

Soit $Z \in \mathcal{Z}(\mathcal{G}_0(X))$; en particulier, $[Z, X] \in \mathcal{G}_0(X)$ et $[X, Z] \in \mathcal{G}_0(X)$.

Donc $(\text{ad } X)^n [X, Z] = 0$ et $(\text{ad } X)^{n+1} Z = 0 \Rightarrow Z \in \mathcal{G}_0(X)$.