Vune Franz 8/11/11

(1)

Décomposition de Levi : toute algèbre de Lie est produit semidirect

$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$ d'une alg. semisimple et d'une alg. résoluble

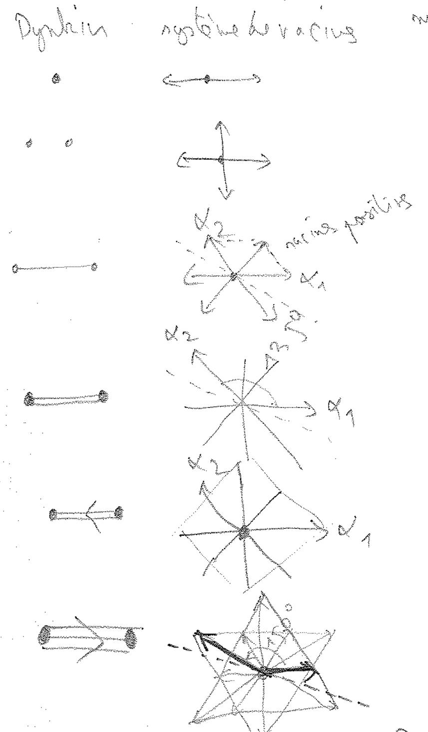
"
ne contiennent pas d'idéal abélien

(et on a le théorème de Cartan : $\mathfrak{g}$ semi-simple ssi la forme de Killing B est non dégénérée

i.e. $\forall y \in \mathfrak{g}$ $B(x,y)=0 \Rightarrow x=0$)

$\mathfrak{g}$ est <u>simple</u> si $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéal non trivial et $\mathfrak{g}$ n'est pas abélien

On a la prop : $\mathfrak{g}$ semi-simple $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ est somme directe $\mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_r$ d'algèbres simples



matrice de Cartan

Cas $r=1$ $\mathfrak{sl}_2 = A_1$ (2)

$r=2$ $\begin{pmatrix} A_1 \oplus A_1 \\ \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ dim 6 (le quatre étiqs de dim 2)

$\begin{pmatrix} A_2 \\ \mathfrak{sl}_3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ dim 8, α_1, α_2 racines simples

B_2 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ dim 10

$C_2 \cong B_2$ $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

G_2 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ dim 14

<u>Relation de Serre</u> : $A = (A_{jk})_{1 \le j,k \le l}$ ← matrice de Cartan, de générateurs $h_1, \dots, h_l$, $e_1, \dots, e_l$, $f_1, \dots, f_l$

(LNM 1500)

→ il considère l'algèbre de Lie libre engendrée par les générateurs, puis impose les relations suivantes :

$[h_i, h_j] = 0$

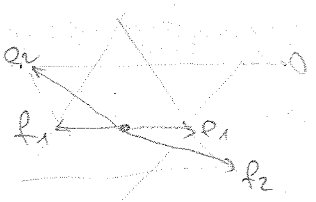
$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i$

[rappel : $[X_\alpha, X_\beta] = \begin{cases} H_\alpha & \text{si } \alpha+\beta=0 \\ \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha+\beta \in \Delta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$[h_i, e_j] = A_{ij} e_j$

$[h_i, f_j] = -A_{ij} f_j$

ex :



si $i \neq j$ $(\operatorname{ad} e_i)^{1-A_{ij}} e_j = 0$ [on sort en $1-A_{ij}$ pas du système des racines]

De même, $(\mathrm{ad}\, f_i)^{1-A_{ij}} f_j = 0$ si $i \neq j$

Chapitre: <u>groupes de Lie compacts sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$</u>

<u>Th$_0$</u>: Si G groupe de Lie est connexe, résoluble et compact, alors G est abélien.

<u>Th$_1$</u>: Si G est un groupe de Lie connexe compact sur $\mathbb{C}$, alors G est un tore complexe: $G \cong \mathbb{C}^n/\Gamma$ où Γ s.g discret de rang $2n$

<u>dém:</u> appl^{n} du prcpe du maximum: il n'existe pas de f^{n} analytique non constante sur G si G compacte.

$$G \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\, \mathfrak{g} \cong M_n(\mathbb{C})$$
$$g \longmapsto \mathrm{Ad}_g\,,\quad \mathrm{Ad}_g X = g X g^{-1}$$ est analytique, donc constante

Donc $\mathrm{Ad}_g = \mathrm{Ad}_1 = 1$ pour tout $g \in G$, ~~G est abélien~~

$\mathrm{ad}\, X = 0$ pour $X \in \mathfrak{g}$ et donc $\mathfrak{g}$ abélien
et donc G loc^{t} abélien.

Or G est connexe compact. Donc $G \cong \mathbb{C}^n/\Gamma$

<u>Th 2</u>: G groupe de Lie compact sur $\mathbb{R}$ avec algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.
Alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ où $\mathfrak{a}$ est abélien, $\mathfrak{s}$ est semi simple avec forme de Killing nég déf.

<u>Réciproq^{t}</u>, $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$, $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ avec $\mathfrak{a}$ abélien et $\mathfrak{s}$ semi-simple avec forme de Killing négative définie admet un groupe compact qui a $\mathfrak{g}$ comme algèbre de Lie.
De plus, si $\mathfrak{a} = \{0\}$, alors tout groupe de Lie connexe avec algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est compact: $SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$

Dém du th 2 : Comme G est compact, il existe un produit scalaire sur $\mathfrak{g}$ tel que $\langle Ad_g X, Ad_g Y \rangle = \langle X, Y \rangle$ pour $g \in G$ et $X, Y \in \mathfrak{g}$:

(on l'obtient en intégrant par rapport à la mesure de Haar)

Donc $\mathfrak{g}$ est complètement réductible pour l'action ad :

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_r$ avec $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_r$ des idéaux minimaux,
$= \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{a}$ avec $\mathfrak{s}$ semisimple.
c'est-à-dire $\mathfrak{g}_i$ est simple ou $\mathfrak{g}_i \cong \mathbb{R}$.

Montrons que la forme de Killing est négative définie :

$X \in \mathfrak{s}$, $u = ad_{\mathfrak{s}} X$ par l'invariance de $\langle \, , \rangle$, $\langle uy, z \rangle + \langle y, uz \rangle = 0$ pour $y, z \in \mathfrak{s}$.

Si $z = uy$, $\langle y, u^2 y \rangle = - \langle uy, uy \rangle$

Si $y_1, \dots, y_n$ est une base de $\mathfrak{s}$, $B_{\mathfrak{s}}(X, X) = \operatorname{tr} u^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle y_j, u^2 y_j \rangle$
$= -\sum_{j=1}^{n} \|u y_j\|^2 \leq 0.$

Comme $ad_X \neq 0$ (il n'y a pas de centre ! $\mathfrak{s}$ est semi-simple)
on a $B_{\mathfrak{s}}(X, X) = -\sum \|u y_j\|^2 < 0$ pour $X \in \mathfrak{s} \setminus \{0\}$.

Déf : Une alg. de Lie semisimple sur $\mathbb{R}$ est <u>compacte</u> si la forme de Killing $B_{\mathfrak{g}}$ est négative définie.

Chapitre : Complexification, réellification et forme réelle

<u>Complexification</u> : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$: on appelle $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g} = \{ X + iY : X, Y \in \mathfrak{g} \}$ la <u>complexification</u> de $\mathfrak{g}$.

on pose : $[X+iY, X'+iY'] = [X, X'] - [Y, Y'] + i([X, Y'] + [Y, X'])$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$

Pour $X \in g$, on l'associe à $(X+i0) \in g_{\mathbb{C}}$

$\mathrm{ad}_{g_{\mathbb{C}}} X : g_{\mathbb{C}} \to g_{\mathbb{C}}$ est l'extension $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathrm{ad}_g X$.

Donc $B_g = B_{g_{\mathbb{C}}}|_{g \times g}$.

Proposition : g est semisimple ssi $g_{\mathbb{C}}$ l'est.

Réellification : on restreint du corps $\mathbb{C}$ au corps $\mathbb{R}$.

Alors $g_{\mathbb{R}} = g$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

$[\,,\,] : g_{\mathbb{R}} \times g_{\mathbb{R}} \to g_{\mathbb{R}}$ est un crochet de Lie

et on peut considérer $g_{\mathbb{R}}$ comme une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$,

$\dim_{\mathbb{R}} g_{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} g$: si $\xi_1, \dots, \xi_n$ $\mathbb{C}$-base de g,

alors $\xi_1, \dots, \xi_n, i\xi_1, \dots, i\xi_n$ est une $\mathbb{R}$-base de $g_{\mathbb{R}}$.

Si $\mathrm{ad}_g X = (c_{jk})$ avec $c_{jk} \in \mathbb{C}$, $\mathrm{ad}_{g_{\mathbb{R}}} X = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, c_{jk} & -\mathrm{Im}\, c_{jk} \\ \mathrm{Im}\, c_{jk} & \mathrm{Re}\, c_{jk} \end{pmatrix}$

et $B_{g_{\mathbb{R}}} = 2 \,\mathrm{Re}\, B_g$

Prop : $g_{\mathbb{R}}$ est semisimple ssi g est semisimple.

Sur $g_{\mathbb{R}}$ on peut définir $I : g_{\mathbb{R}} \to g_{\mathbb{R}}$, $X \mapsto iX$ alors I vérifie $I^2 = -\mathrm{id}$, $I([X,Y]) = [X, IY]$

Une telle application linéaire est appelée structure complexe sur $g_{\mathbb{R}}$.

Si g est une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie, on obtient $(g_{\mathbb{R}}, I)$ $\mathbb{R}$-algèbre de Lie, I structure complexe

et vice versa. $(\alpha + i\beta) X = \alpha X + \beta I X$.

On peut aussi définir l'algèbre de Lie conjuguée d'une algèbre de Lie complexe : $\overline{g}$: $\lambda \overline{X} = \overline{\overline{\lambda} X}$; g et $\overline{g}$ sont isomorphes ssi g a un automorphisme antilinéaire et $(g_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \cong g \oplus \overline{g}$; $g_{\mathbb{R}} \cong (\overline{g})_{\mathbb{R}}$.

<u>Forme réelle</u> : Une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$ h est appelée <u>forme réelle</u> d'une algèbre de Lie g sur $\mathbb{C}$ si l'inclusion $h \subset g_{\mathbb{R}}$ s'étend en un isomorphisme $h_{\mathbb{C}} \cong g$

C'est-à-dire que g est isomorphe à la complexification de h :

$$\dim_{\mathbb{R}} h = \dim_{\mathbb{C}} h_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{C}} g = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} g_{\mathbb{R}}$$

<u>Exemple</u> : $su(2)$ et $sl(2,\mathbb{R})$ sont toutes deux des formes réelles de $sl(2;\mathbb{C})$.

Soient h_1, h_2 deux formes réelles d'une algèbre de Lie g ; alors $h_1 \cong h_2$ (en tant que $\mathbb{R}$-algèbres de Lie) ssi il existe un automorphisme $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}\, g$ tel que $\varphi(h_1) = h_2$.

Remarque : • $su(2)$ et $sl(2;\mathbb{R})$ ne sont pas isomorphes.
cpct / B nég déf. — non cpct / B non nég. déf.

• Il existe des alg. de Lie complexes qui ne sont pas des complexifications d'algèbres de Lie réelles, i.e. une algèbre de Lie complexe n'admet pas toujours une forme réelle.

Ex : $g = \mathrm{span}\{T, E_1, E_2\}$ avec $[E_1, E_2] = 0$, $[T, E_j] = \lambda_j E_j$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

si $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = i$, g n'est pas la complexification d'une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$ car $[g^{\mathbb{C}}, g^{\mathbb{C}}] = [g,g]^{\mathbb{C}}$

et ici $[g,g] = \mathrm{span}\{E_1, iE_2\} = \mathbb{R}^2$ et $g \cong \mathbb{C} \ltimes_{\varphi} \mathbb{C}^2$

$\varphi(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

• Si g est la complexification d'une algèbre de Lie réelle h, $h \cong \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$, alors on peut définir sur g un automorphisme antilinéaire involutif, la conjugaison complexe de $g = h \oplus ih$: $\sigma(X + iY) = X - iY$
On a $\sigma^2 = \mathrm{id}$ et $\sigma([X,Y]) = [\sigma(X), \sigma(Y)]$. σ est la <u>structure réelle</u> ($X, Y \in h$).
assoc.

$\mathfrak{g}$ $\mathbb{R}$-algèbre de Lie $\longrightarrow (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \sigma)$
$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} : \sigma(X) = X\} \longleftarrow$

structure réelle

Remarque : on peut aussi définir une autre involution $(X+iY)^* = -X+iY$ qui permet également de récupérer $\mathfrak{g}$ de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, *)$, $\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} : X^* = -X\}$.

Stratégie : déterminer les formes réelles des alg. complexes classifiées par Laurent.

Deux automorphismes antilinéaires involutifs correspondent à des formes réelles isomorphes si $\exists \varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}\, \mathfrak{g}$ $\sigma_1 = \varphi \circ \sigma_2 \circ \varphi^{-1}$

Automorphismes d'algèbre de Lie semi simple :

- $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$: $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{g} \subseteq GL(\mathfrak{g})$ est un groupe algébrique linéaire et donc aussi un groupe de Lie linéaire.
- L'algèbre de Lie de $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{g}$ est $\mathrm{Dér}\, \mathfrak{g}$, l'algèbre de Lie des dérivations sur $\mathfrak{g}$. $\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), Y] + [X, \varphi(Y)]$.
- Or, si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, alors $\mathrm{Dér}\, \mathfrak{g} = \mathrm{ad}\, \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}$

à justifier : th. de Weyl.

Weyl montre que $\mathrm{Dér}\, \mathfrak{g} = \underset{\text{dér. int}}{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \oplus \underset{\text{dér. extérieures}}{\mathfrak{a}}$

et si $X \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}(Dx) = [D, \mathrm{ad}\, x] = 0$

$D \in \mathfrak{a}$ dérivation extérieure. Donc $Dx = 0$, $D = 0$ et $\mathfrak{a} = \{0\}$

Donc toutes les dérivations sont intérieures et on en déduit la composante connexe de l'id de $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{g}$, notée $(\mathrm{Aut}\, \mathfrak{g})_0$ elle est isomorphe à $\mathrm{Ad}\, G = \mathrm{Int}\, \mathfrak{g}$.

Th : $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{g} = \mathrm{Int}\, \mathfrak{g} \rtimes \mathrm{Aut}\, \Pi$ où Π est le système des racines simples

La forme réelle scindée :

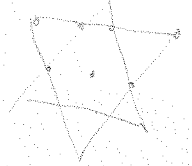
Th: $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semisimple sur $\mathbb{C}$.

On peut choisir $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ pour chaque $\alpha \in \Delta$ (toutes les racines)

tel que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$ et $[X_\alpha, X_\beta] = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha+\beta \neq 0 \text{ ou } \alpha+\beta \notin \Delta \\ N_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha+\beta \in \Delta. \end{cases}$

où les $N_{\alpha,\beta}$ vérifient $N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta}$.

$N_{\alpha,\beta}^2 = \frac{1}{2} q(1+p)|\alpha|^2 > 0$ et donc $N_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$



où q et p st tels que $\{\beta + n\alpha : -p \leq n \leq q\}$ et une "α-chaîne passant par β" (α, β racines)

Ainsi $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R} X_\alpha$ avec $\mathfrak{h}_0 = \{H \in \mathfrak{h} : \alpha(H) \in \mathbb{R} \text{ pour } \alpha \in \Delta\}$

$([H, X_\alpha] = \alpha(H) X_\alpha)$

et une forme réelle de $\mathfrak{g}$,
dite <u>forme réelle scindée</u> de $\mathfrak{g}$ (non compacte en gén.)

(→ rappel avec les représentations de $\mathfrak{sl}_2$)

Th : Toute algèbre de Lie semisimple admet une forme réelle compacte.

On la définit à partir de la base de la forme scindée

$$\mathfrak{g}_u = \underbrace{\sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R} i H_\alpha}_{\text{ce n'est pas une somme directe}} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}(X_\alpha - X_{-\alpha}) + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R} i (X_\alpha + X_{-\alpha})$$

[Onishi + Vinberg, Lie algebras and Lie groups III, Springer encycl. math]

Table 4. The table lists noncompact real Lie algebras $\mathfrak{g}$ that do not admit a complex structure, i.e. the real form of complex simple Lie algebras $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$. The table also indicates the type of the system Σ of real roots and the restriction map $r\colon \Pi_1 \to \Theta$, where Θ is the system of simple roots of Σ. The simple roots from Π are denoted by α_j, those from Θ by λ_j; the numbering in both these systems is the same as in Table 1.

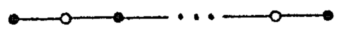
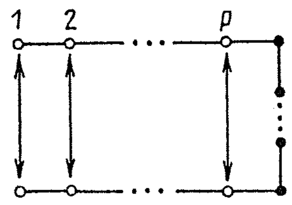
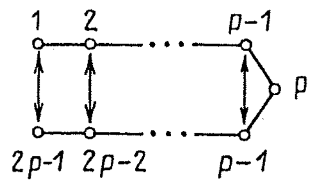
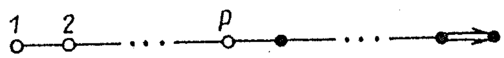
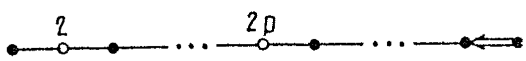
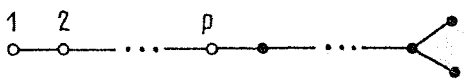
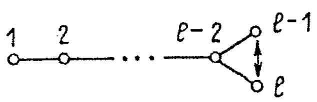
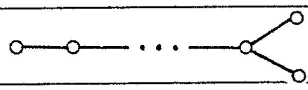
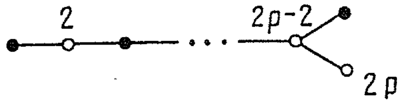
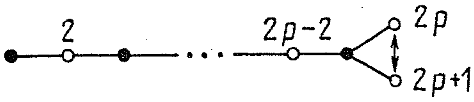
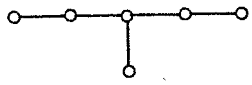
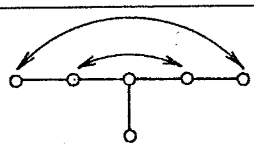
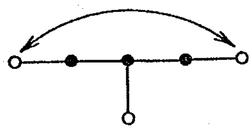
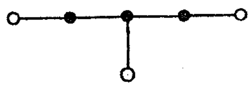
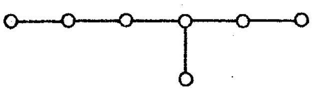
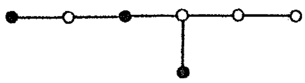
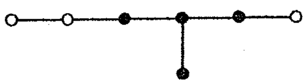
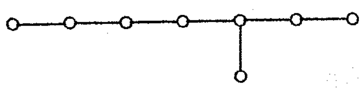
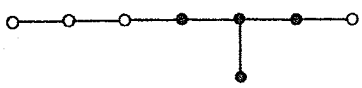
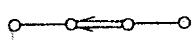
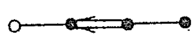
$\mathfrak{g}(\mathbb{C})$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}$	$\dim \mathfrak{k}$	$\dim \mathfrak{p}$	$\mathrm{rk}_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}$	Satake diagram
	$\mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}_{l+1}$	$\frac{1}{2}l(l+1)$	$\frac{1}{2}l(l+3)$	l	
	$\mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{H})$ $(l=2p+1,$ $p \geqslant 1)$	$\mathfrak{sp}_{p+1}$	$(p+1)$ $\times(2p+3)$	$p(2p+3)$	p	
$\mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{C})$ $(l \geqslant 1)$	$\mathfrak{su}_{p,l+1-p}$ $(1 \le p \le \frac{l}{2})$	$\mathfrak{su}_p$ $\oplus\mathfrak{u}_{l+1-p}$	p^2+ $(l+1-$ $-p)^2-1$	$2p\times$ $(l+1-$ $-p)$	p	
	$\mathfrak{su}_{p,p}$ $(l=2p-1,$ $p \geqslant 2)$	$\mathfrak{su}_p \oplus \mathfrak{u}_p$	$2p^2-1$	$2p^2$	p	
$\mathfrak{so}_{2l+1}(\mathbb{C})$ $(l \geqslant 1)$	$\mathfrak{so}_{p,2l+1-p}$ $(1 \le p \le l)$	$\mathfrak{so}_p$ $\oplus\mathfrak{so}_{2l+1-p}$	$p(2p+1)-$ $-(2l+1$ $-p)(4l+$ $+3-2p)$	$p(2l+1-$ $-p)$	p	
	$\mathfrak{sp}_{2l}(\mathbb{R})$	$\mathfrak{u}_l$	l^2	$l(l+1)$	l	
$\mathfrak{sp}_{2l}(\mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}_{p,l-p}$ $(1 \le p$ $\le \frac{1}{2}(l-1))$	$\mathfrak{sp}_p \oplus \mathfrak{sp}_{l-p}$	$p(2p+1)+$ $+(l-p)\times$ $\times(2l-2p$ $+1)$	$4p(l-p)$	p	
	$\mathfrak{sp}_{p,p}$ $(l=2p)$	$\mathfrak{sp}_p \oplus \mathfrak{sp}_p$	$2p(2p+1)$	$4p^2$	p	
$\mathfrak{so}_{2l}(\mathbb{C})$ $(l \geqslant 4)$	$\mathfrak{so}_{p,2l-p}$ $(1 \le p$ $\le l-2)$	$\mathfrak{so}_p$ $\times\mathfrak{so}_{2l-p}$	$\frac{1}{2}p(p-1)+$ $\frac{1}{2}(2l-p)\times$ $(2l-p+1)$	$p(2l-p)$	p	
	$\mathfrak{so}_{l-1,l+1}$	$\mathfrak{so}_{l-1}$ $\times\mathfrak{so}_{l+1}$	$\frac{1}{2}(l-1)\times$ $(l-2)+$ $\frac{1}{2}l(l+1)$	l^2-1	$l-1$	

Table 4 (cont.)

$\mathfrak{g}(\mathbb{C})$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}$	$\dim \mathfrak{k}$	$\dim \mathfrak{p}$	$\mathrm{rk}_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}$	Satake diagram
$\mathfrak{so}_{2l}(\mathbb{C})$ $(l \geqslant 4)$	$\mathfrak{so}_{l,l}$	$\mathfrak{so}_l \times \mathfrak{so}_l$	$l(l-1)$	l^2	l	
	$\mathfrak{u}^*_{2p}(\mathbb{H})$ $(l = 2p)$	$\mathfrak{u}_{2p}$	$4p^2$	$2p(2p-1)$	p	
	$\mathfrak{u}^*_{2p+1}(\mathbb{H})$ $(l = 2p+1)$	$\mathfrak{u}_{2p+1}$	$(2p+1)^2$	$2p(2p+1)$	p	
E_6	E I	$\mathfrak{sp}_4$	36	42	6	
	E II	$\mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{su}_6$	38	40	4	
	E III	$\mathfrak{so}_{10} \oplus \mathbb{R}$	46	32	2	
	E IV	F_4	52	26	2	
E_7	E V	$\mathfrak{su}_8$	63	70	7	
	E VI	$\mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{so}_{12}$	69	64	4	
	E VII	$E_6 \oplus \mathbb{R}$	79	54	3	
E_8	E VIII	$\mathfrak{so}_{16}$	120	128	8	
	E IX	$\mathfrak{su}_2 \oplus E_7$	136	112	4	
F_4	F I	$\mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{sp}_3$	24	28	4	
	F II	$\mathfrak{so}_9$	36	16	4	
G_2	G	$\mathfrak{so}_3 \oplus \mathfrak{so}_3$	6	8	2