Uwe Franz ①
15/11/2011

Classifier toutes les formes réelles = classifier les automorphismes involutifs :

il y a une bijection, pour $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie $\frac{1}{2}$simple sur $\mathbb{C}$, entre

$\{$formes réelles$\}/_{\text{isométrie}}$ et $\{[\sigma]$ classe d'auto antilin involutif$\}$ à conjugaison près

et $\{$classes d'auto lin involutifs$\}$ à conjugaison près

et $\{[\sigma\tau]$, où τ est l'auto antilin associé à une forme compacte$\}$

(τ est unique à cjg près)

Nous allons considérer e_j, f_j, h_j, $j = 1, \dots, l$ avec les relations de Serre :

– l'auto qui correspond à la forme réelle scindée est déterminé par $\begin{cases} \sigma(e_j) = e_j \\ \sigma(f_j) = f_j \end{cases}$

– ———— compacte ———— $\begin{cases} \tau(e_j) = -f_j \\ \tau(f_j) = -e_j \end{cases}$

(si on prend Φ l'ensemble de toutes les racines, Φ est stable par $-$)

<u>Th fondamental de Cartan</u> : Toutes les formes réelles d'une algèbre de Lie semisimple sur $\mathbb{C}$ s'obtiennent ainsi :

– déterminer tous les automorphismes involutifs S de la forme réelle compacte $\mathfrak{g}_K$

S a 2 vp : ± 1. On décompose $\mathfrak{g}_K = \underbrace{E_{+1}}_{[S[X]=X]} \oplus \underbrace{E_{-1}}_{[S(X)=-X]}$

et on choisit une base adaptée à cette décomposition.

En multipliant les vecteurs de cette base appartenant à E_{-1} par i, on obtient la forme réelle correspondant à S.

<u>Exemple</u> : $\mathfrak{g} = so(3)$. C'est la forme compacte de $A_1 = sl_2\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.

La base est X_1, X_2, X_3 avec $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_2, X_3] = X_1$, $[X_3, X_1] = X_2$.

On a, à conjugaison près, 4 applications linéaires involutives :

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}}$$

ce ne sont pas des automorphismes

Il en reste 2 : $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ correspond à $so(3) \simeq su(2)$

et $\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$ correspond à $Y_1 = X_1$, $Y_2 = iX_2$, $Y_3 = iX_3$.

on a $[Y_1, Y_2] = Y_3$, $[Y_2, Y_3] = -Y_1$; $[Y_3, Y_1] = Y_2$

et en prenant $h = Y_3$, $[Y_3, Y_1 + Y_2] = Y_1 + Y_2$

$[Y_3, Y_1 - Y_2] = -(Y_1 - Y_2)$

Donc $e = Y_1 + Y_2$

$f = Y_1 - Y_2$; cela décrit la forme réelle scindée : $so(2,1) \simeq sl(2;\mathbb{R}) \simeq su(1,1)$.

<u>Définition</u> : une algèbre de Lie $\frac{1}{2}$simple sur $\mathbb{R}$ est <u>scindée</u> si elle contient une sous-algèbre de Cartan $\mathcal{H}$ telle que ad_h est diagonalisable <u>sur $\mathbb{R}$</u> pour tout $h \in \mathcal{H}$

Pour A_n, on obtient $sl(n;\mathbb{R})$

B_n $so(n, n+1)$

C_n $so(n,n)$

D_n $sp(n, \mathbb{R})$ [matrice $2n \times 2n$].

<u>Définition</u> : Une <u>décomposition de Cartan</u> d'une algèbre de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{R}$ est une décomposition de $\mathfrak{g}$ en deux sous-espaces $\mathfrak{g} = k \oplus p$ telle que

① $\theta : \underset{k}{x} + \underset{p}{y} \longmapsto x - y$ est un automorphisme de $\mathfrak{g}$

② $B_\theta(x,y) = -B(x, \theta y)$ est positive définie pour $x, y \in \mathfrak{g}$.

(Il faut montrer que B est la forme de Killing de la forme compacte)

Pour $so(2,1)$, on a $k = \mathbb{C} Y_3$

$p = \mathrm{span}\{Y_1, Y_2\}$

$K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \right\}$

$e^{\varphi Y_1} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\varphi & \mathrm{sh}\,\varphi & 0 \\ \mathrm{ch}\,\varphi & \mathrm{ch}\,\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$e^{\varphi Y_2} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\varphi & 0 & \mathrm{sh}\,\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sh}\,\varphi & 0 & \mathrm{ch}\,\varphi \end{pmatrix}$

On a $[k,k] \subset k$

$[k,p] \subset p$ La forme de Killing est nég. déf. sur k

$[p,p] \subset k$ pos. déf sur p.

<u>Exemple :</u> $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n;\mathbb{R})$

$k = so(n) = \{ x \in \mathfrak{g} : x^t = -x \}$

$p = \{ x \in \mathfrak{g} : x^t = x \}$

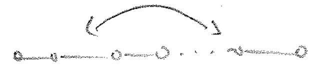
est la décomposition de Cartan de $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{R})$, $\Theta(X) = -X^t$ (unique à conjugaison près)

<u>Remarque :</u> G un groupe convexe d'alg de Lie $\frac{1}{2}$ sple réelle $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} = k \oplus p$.
Alors $G = KP$, K groupe de Lie compact avec algèbre de Lie k
$P = e^{p}$.

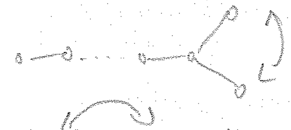
L'application $\varphi : K \times p \longrightarrow G$
$(h, y) \longmapsto h e^y$ est un difféomorphisme

(et donc G est difféomorphe à $K \times \mathbb{R}^m$ avec $m = \dim p$
et K groupe cpct maximal de G.)

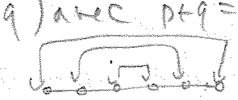
- Les automorphismes intérieurs agissent trivialement sur le diagramme de Dynkin ($\simeq$ système des racines simples $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$)
- Les automorphismes extérieurs correspondent aux symétries du diagramme de Dynkin. Il peut ne pas y en avoir. Ils existent seulement pour A_n, D_n, E_6 :

A_n $n \geq 2$: 

D_4  a 6 automorphismes

D_n $n > 4$  en a 2

E_6 : 

A_n ($su(p,q)$ avec $p+q = n+1$, $p \leq q$)
- si $n = 2r$  $\longrightarrow \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$
- si $n = 2r+1$  $\nearrow \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$ $\searrow \mathfrak{sl}_r(\mathbb{H})$

$1 \alpha_i$