

Le groupe des transformations affines

$$x \mapsto ax+b, a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}.$$

- Notons (b, a) le point générique de G , ou matriciellement $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Soit N le sous-groupe de éléments $(b, 1) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (translations)
 $K = \{ (0, a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$ (homothéties)
- Alors G est le produit semi-direct de N et K (la loi de G est donnée par $(b, a)(d, c) = (ad+b, ac)$ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)
 (notons aussi que $(b, a)^{-1} = (-\frac{b}{a}, \frac{1}{a})$ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)
- Les sous-groupes K et N s'identifient naturellement à $\mathbb{R}^{+*}$ et à $\mathbb{R}$.

- On munit G de la mesure de Haar à gauche $dg(b, a) = \frac{da db}{a^2}$.

On a bien $\textcircled{1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{+*}} f((d, c)(b, a)) dg(b, a) = \iint f(b, a) dg(b, a)$

puisque $\textcircled{1} = \iint f((bc+d, ca)) \frac{da db}{a^2}$

$= \iint f((bc+d, x)) \frac{c dx db}{x^2}$

par $ca=x$ ou $a=\frac{x}{c}$

$= \iint f((y, u)) \frac{du dy}{x^2}$

$bc+d=y$ ou $b=\frac{y-d}{c}$

- On considère l'espace $L^p(G)$ relatif à dg .

- La fonction modulaire du groupe G est Δ donnée par $\Delta((d, c)) = \frac{1}{c}$.

On a bien $\textcircled{1} \iint f((b, a)(d, c)^{-1}) \frac{da db}{a^2} = \Delta(d, c) \iint f((b, a)) \frac{da db}{a^2}$ $\textcircled{2}$

puisque

$\textcircled{1} = \iint f((b, a)(-\frac{d}{c}, \frac{1}{c})) \frac{da db}{a^2}$

$= \iint f((-\frac{ad}{c} + b, \frac{a}{c})) \frac{da db}{a^2}$

Posons $\frac{a}{c} = x$: $\textcircled{1} = \iint f((\frac{ad}{c} + b, x)) \frac{du db}{cx^2}$, Posons $y = -\frac{ad}{c} + b$: $\textcircled{1} = \iint f((y, u)) \frac{1}{c} \frac{du dy}{x^2} = \textcircled{2}$.

Pour toute fonction complexe sur G , adoptons les notations suivantes

$$\check{f}(u) = \overline{f(u^{-1})}, \quad \tilde{f}(u) = f(u^{-1}).$$

On va travailler sur les représentations unitaires irréductibles définies par

$$\begin{aligned} \pi_+(b, a) \xi(t) &= e^{-2\pi i b t} \xi(at) \\ \pi_-(b, a) (\xi t) &= e^{+2\pi i b t} \xi(at) \end{aligned} \quad \text{où } \xi \in L^2(\mathbb{R}^{++}).$$

Rappelons pour le nomme de Schatten $\| \cdot \|_p$ que $\|ST\|_r \leq \|S\|_p \|T\|_q$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$.
pour la classe de Schatten, que $S_p^* = S_q$ si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leq p < \infty$.

et S_2 est un e.h. pour $\langle S, T \rangle = \text{tr } T^* S$.

Considérons l'espace $L^p(\pm)$ de couple (S_+, S_-) avec $S_+, S_- \in S_p$, muni de la norme $\|S\|_p = (\|S_+\|_p^p + \|S_-\|_p^p)^{\frac{1}{p}}$.

Formule de Plancherel Soit $f \in L^1(G)$. Posons $\mathcal{F}_+(f) = T_+(f)$ et $\mathcal{F}_-(f) = T_-(f)$
→ De façon précise, si $\xi \in L^2(\mathbb{R}_+^*)$, $\mathcal{F}_\pm(f) \xi(t) = \iint e^{\mp 2\pi i b t} \xi(at) f(b, a) \frac{da db}{a^2}$

→ Soit V l'espace de $L^2(G)$ des fonctions $f(b, a) = \sum c_n \varphi_n(b) \psi_n(a)$, somme finie
où $\varphi_n \in \mathcal{Y}(\mathbb{R})$, $\psi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$. V est dense dans $L^2(G)$.

→ Soit δ l'opérateur non borné de $L^2(\mathbb{R}^{++})$ de domaine dense défini par

$\delta \xi(t) = \sqrt{t} \xi(t)$. Pour $f \in V$, $f(b, a) = \sum c_n \varphi_n(b) \psi_n(a)$, posons

$$\mathcal{J}_+(f) = \delta \mathcal{F}_+(\Delta^{-\frac{1}{2}} f) \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_-(f) = \delta \mathcal{F}_-(\Delta^{-\frac{1}{2}} f).$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \xi \in L^2(\mathbb{R}^{++}), \quad \mathcal{J}_\pm(f) \xi(t) &= \sqrt{t} \iint e^{\mp 2\pi i b t} \xi(at) f(b, a) \Delta^{\frac{1}{2}}(b, a) \frac{da db}{a^2} \\ &= \sqrt{t} \iint e^{\mp 2\pi i b t} \xi(at) \sum c_n \varphi_n(b) \psi_n(a) a^{\frac{1}{2}} \frac{da db}{a^2} \\ &= \sum c_n \sqrt{t} \hat{\varphi}_n(\pm t) \int_0^\infty \xi(a) \psi_n(a) a^{-\frac{1}{2}} \frac{da}{a}. \end{aligned}$$

On a les faits suivants

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathcal{J}_\pm(f) \xi &\in L^2(\mathbb{R}^{++}), \\ t \longmapsto \sqrt{t} \hat{\varphi}_n(\pm t) &\text{ bornée,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \xi(at) \psi_n(a) a^{-\frac{1}{2}} \frac{da}{a} &= \int \check{\psi}_n(a^{-1}) a^{-\frac{1}{2}} \xi(at) \frac{da}{a} \\ &= \int \check{\psi}_n(a) a^{\frac{1}{2}} \xi(a^{-1}t) \frac{da}{a} \\ &= \underbrace{(\check{\psi}_n(a) a^{\frac{1}{2}})}_{\in L^1(\mathbb{R}_+^*)} * \xi(t) \end{aligned} \quad (a^{-1} \mapsto a)$$

En fait, on a même $\hat{f}_{\pm}(f) \in \Omega_2(H)$.

Notons, pour $f \in V$, $\mathcal{F}(f) = (\mathcal{F}_+(f), \mathcal{F}_-(f))$ et la $\mathcal{O}$ de Fourier
 $\mathcal{S}(f) = (\mathcal{S}_+(f), \mathcal{S}_-(f))$ et la $\mathcal{O}$ de Plancherel.

Théorème 1: ① Si $f \in V$, $\mathcal{S}(f) \in L^2(\pm)$. On a $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\mathcal{S}(f)\|_2 = (\|\mathcal{S}_+(f)\|_2^2 + \|\mathcal{S}_-(f)\|_2^2)^{1/2}$.
 ② L'application $f \mapsto \mathcal{S}(f)$ se prolonge à $L^2(\mathbb{R})$ en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\pm)$.

Dém: ① $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}$: $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int |\int f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx|^2 d\xi$
 $= \int \left(\int f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \int \overline{f(y)} e^{2\pi i y \cdot \xi} dy \right) d\xi$
 $= \int \int \overline{f(y)} f(x) \int e^{-2\pi i (x-y) \cdot \xi} d\xi dx dy = \int \int \overline{f(y)} f(x) \delta(x-y) dx dy = \int |f(x)|^2 dx$

Soit ξ_n une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^*)$. On a

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathcal{S}_{\pm}(f)^* \mathcal{S}_{\pm}(f)) &= \sum \|\mathcal{S}_{\pm}(f) \xi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^*)}^2 \\ &= \sum \left\| \int \mathbb{R}^* \underbrace{c_a \hat{\varphi}_a(\pm t)}_{\text{}} \int \xi_n(a) a^{-\frac{1}{2}} \varphi_a(a) \frac{da}{a} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^*)}^2 \\ &= \sum \int_0^\infty \left| \int \mathbb{R}^* c_a \hat{\varphi}_a(\pm t) \int \xi_n(a) a^{-\frac{1}{2}} \varphi_a(a) \frac{da}{a} \right|^2 \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

Prenons $a=t$. On a

$$\begin{aligned} &= \sum \int_0^\infty \left| \int \mathbb{R}^* c_a \hat{\varphi}_a(\pm t) \int \xi_n(u) \left(\frac{t}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \varphi_u\left(\frac{u}{t}\right) \frac{du}{u} \right|^2 \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left(\int \mathbb{R}^* \left| \int \mathbb{R}^* c_a \hat{\varphi}_a(\pm t) \left(\frac{t}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \varphi_u\left(\frac{u}{t}\right) \xi_n(u) \frac{du}{u} \right|^2 \right) \frac{dt}{t} \\ &= \int \int \left| \sum c_a \hat{\varphi}_a(\pm t) \left(\frac{t}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \varphi_u\left(\frac{u}{t}\right) \right|^2 \frac{du}{u} \frac{dt}{t} \quad (\text{Formule de Parseval}) \\ &= \int \int \left| \sum c_a \hat{\varphi}_a(\pm t) u^{-\frac{1}{2}} \varphi_u(u) \right|^2 \frac{du}{u} \frac{dt}{t} \\ &= \int \int \left| \sum c_a \hat{\varphi}_a(\pm t) \varphi_u(u) \right|^2 \frac{du}{u^2} dt. \end{aligned}$$

Par suite, on a $\text{tr}(\mathcal{S}_+(f)^* \mathcal{S}_-(f)) + \text{tr}(\mathcal{S}_-(f)^* \mathcal{S}_+(f))$
 $= \int_0^\infty \frac{du}{u^2} \int_0^\infty \left(\sum c_a \hat{\varphi}_a(t) \varphi_u(u) \right)^2 dt + \int_0^\infty \frac{du}{u^2} \int_0^\infty \left(\sum c_a \hat{\varphi}_a(-t) \varphi_u(u) \right)^2 dt$
 $= \int_0^\infty \frac{du}{u^2} \int_0^\infty \left(\sum c_a \hat{\varphi}_a(t) \varphi_u(u) \right)^2 dt$
 $= \int_0^\infty \frac{du}{u^2} \int_0^\infty \left(\sum c_a \varphi_a(y) \varphi_u(u) \right)^2 dy.$

Remarque: $\mathcal{F}_\pm(f)$ est un opérateur à noyau:

$$\mathcal{F}_\pm(f) \xi(t) = \int \underbrace{K(t,a)}_{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n(\pm t) \psi_n(\frac{a}{t})} \xi(a) \frac{da}{a}$$

Cas plus général: sur (Ω, μ) et pour $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$,

$$T: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

$$f \mapsto \int K(x,y) f(y) dy$$

$$\text{et } T \in \mathcal{H} \Leftrightarrow K \in L^2(\Omega \times \Omega) \text{ et } \|T\|_{\mathcal{H}} = \|K\|_{L^2(\Omega \times \Omega)}.$$

Prop 1: ① $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$ quelle que soit $f \in L^1(\mathbb{A})$ et $g \in L^1(\mathbb{A})$.

② $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(\Delta^{-\frac{1}{2}} g)$ si $f \in L^2(\mathbb{A})$ et $g \in L^1(\mathbb{A})$.

$$\textcircled{3} [\hat{\mathcal{F}}_\pm(f)]^* = \hat{\mathcal{F}}_\pm(\tilde{f} \Delta^{-\frac{1}{2}})$$

Dém: ① Il suffit de le vérifier pour $f, g \in V$. Soit $\xi \in L^2(\mathbb{R}^{1*})$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \mathcal{F}_\pm(f) \hat{\mathcal{F}}_\pm(g) \xi(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty e^{\mp 2\pi i b t} (\hat{\mathcal{F}}_\pm(g) \xi)(at) f(b, a) \frac{da db}{a} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty e^{\mp 2\pi i b t} \left(\sqrt{at} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty e^{\mp 2\pi i b_1 at} f(a_1 t) g(b_1, a_1) \frac{da_1 db_1}{a_1^{3/2}} \right) \\ &\quad \text{en prend } \alpha = a a_1 \text{ et } \beta = b + b_1 a \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty e^{\mp 2\pi i b t} \left(\sqrt{at} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty e^{\mp 2\pi i (\beta - b) t} f(b t) g\left(\frac{\beta - b}{a}, \frac{\alpha}{a}\right) \frac{d\alpha d\beta}{\alpha^{3/2}} \right) \frac{da db}{a^2} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty e^{\mp 2\pi i b t} f(b t) g\left(\frac{\beta - b}{a}, \frac{\alpha}{a}\right) \frac{d\alpha d\beta}{\alpha^{3/2}} \right) \xi(t) \frac{da db}{a^2} \\ &= \sqrt{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty e^{\mp 2\pi i b t} \xi(\alpha t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty g\left(\frac{\beta - b}{a}, \frac{\alpha}{a}\right) f(b, a) \frac{da db}{a^2} \right] \frac{b \alpha d\beta}{\alpha^{3/2}} \\ &= \sqrt{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty e^{\mp 2\pi i b t} \xi(\alpha t) f * g(\beta, \alpha) \frac{d\alpha d\beta}{\alpha^{3/2}} \\ &= \mathcal{F}_\pm(f * g) \xi(t) \end{aligned}$$

Remarque: Δ est un morphisme de groupe. Donc $\Delta^{-\frac{1}{2}} f * g = (\Delta^{-\frac{1}{2}} f) * (\Delta^{-\frac{1}{2}} g)$

$$\text{Donc } \mathcal{F}_\pm(f * g) = \mathcal{F}_\pm(\Delta^{-\frac{1}{2}}(f * g)) = \mathcal{F}_\pm((\Delta^{-\frac{1}{2}} f) * (\Delta^{-\frac{1}{2}} g))$$

$$= \mathcal{F}_\pm(\mathcal{F}_\pm(\Delta^{-\frac{1}{2}} f) \mathcal{F}_\pm(\Delta^{-\frac{1}{2}} g))$$

Cela donne ②

Introduisons une base hilbertienne particulière de $L^2(\mathbb{R}^*)$,

donnée par $e_n(t) = \sqrt{t} e^{-\frac{t}{2}} L_n(t)$, où $L_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} \frac{(t)^k}{k!}$

est le polynôme de Laguerre de degré n .

Pour ξ, η dans $L^2(\mathbb{R}^*)$, on désigne par $F_{\xi, \eta}$ l'opérateur de rang 1

$$E_{\xi, \eta}(\zeta) = \langle \zeta, \eta \rangle \xi.$$

Lemme 1 : Soient $\xi \neq 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^*)$ et e_j vecteur de la base orthon.

Il existe une fonction f de $L^1(\mathbb{A})$ telle que $\text{tr}(E_{\xi, e_j} \mathcal{D}_+(f)) \neq 0$.

Dém : choisissons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ telle que $\xi * \varphi \neq 0$ et $p \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$ telle que

$$\int_0^\infty \hat{\varphi}(t) \xi * p(t) |e_j(t)| / \sqrt{t} dt \neq 0.$$

Prenons $f = \Delta^{-\frac{1}{2}} \varphi \otimes \check{\varphi} \in L^1(\mathbb{A}) \cap L^2(\mathbb{A})$. On a

$$\begin{aligned} \text{tr}(E_{\xi, e_j} \mathcal{D}_+(f)) &= \sum_n \langle \mathcal{D}_+(f) E_{\xi, e_j} e_n, e_n \rangle \\ &= \sum_n \langle \mathcal{D}_+(f) e_n, \langle e_n, e_j \rangle \xi, e_n \rangle \\ &= \langle \mathcal{D}_+(f) \xi, e_j \rangle \\ &= \int_0^\infty \sqrt{t} \left[\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\pi i b t} \xi(a t) \varphi(b) \check{\varphi}(a) \frac{da}{a} db \right] e_j(t) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \hat{\varphi}(t) \xi * p(t) e_j(t) t^{-\frac{1}{2}} dt \neq 0. \end{aligned}$$

Lemme 2 : Le sous-espace $\mathcal{D}_+(L^2(\mathbb{A}))$ est dense dans $\mathcal{H}_2(L^2(\mathbb{R}^*))$

Dém : ^{au contraire} supposons qu'il existe un opérateur de Hilbert-Schmidt S non nul tel que $n \neq 0 \in \mathcal{B}(\mathbb{A})$, $\langle \mathcal{D}_+(f), S \rangle = \text{tr}(S^* \mathcal{D}_+(f)) = 0$. Soit e_j tel que $S^* e_j \neq 0$

Considérons $E_{ji} = E_{e_j, e_i}$.

"groupe de type 1"

Or Scholà (J. Dixmier) $\mathbb{A}$ est postliminaire et π_+ étant irréductible, il existe

des fonctions intégrales $g_\alpha \in L^1(\mathbb{A})$ telles que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\pi_+(g_\alpha)\|_{\mathcal{H}_2} = 0$

[en fait, on peut procéder ainsi : la C^* -algèbre engendrée par les $\pi_+(g)$, $g \in L^1(\mathbb{A})$, contient un p -compact. L'irréductibilité de π_+ montre que l'idéal engendré par ce compact est l'ensemble de tous les compacts]

" $C^*_\pi(\mathbb{A}) \supset K(\mathcal{H})$ "

$$\mathcal{F}_+(g_\alpha) P_+(f) = \mathcal{F}_+(g_\alpha * f) : \text{donc } \textcircled{*} \langle \mathcal{F}_+(g_\alpha) \mathcal{F}_+(f), S \rangle = \langle \mathcal{F}_+(g_\alpha * f), S \rangle = 0 \quad \textcircled{2}$$

pour tout α et tout $f \in L^2(G)$ et $\|\mathcal{F}_+(g_\alpha) \mathcal{F}_+(f) - E_{ij} P_+(f)\|_2 \leq \|\mathcal{F}_+(g_\alpha) - E_{ij}\|_2 \|P_+(f)\|_2$

En faisant $\alpha \rightarrow \infty$ dans *, on a pour $f \in L^2(G)$ $\langle E_{ij} P_+(f), S \rangle = 0$

$$\text{Or } S^* E_{ij} = E_{ji}^* S^* \text{ et donc } \text{tr}(S^* E_{ij} P_+(f)) = \text{Tr}(E_{ji}^* S^* P_+(f)) = 0$$

Problème : Bechta - n.c. ? - spéc' groupe de Hecke.

L'Est de Hausdorff-Young est-elle vraie avec une constante < 1 ?