

L'algèbre de von Neumann du groupe axés, suite

GdT
Mikael de la Salle
29 nov. 2011

Rappels:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a > 0, b \in \mathbb{R} \right\} \subset GL_2(\mathbb{R})$$

noté (b, a)

$$G \cong \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}_+^*$$

mesure de Haar à gauche $\frac{da db}{a^2}$

fonction modulaire $\Delta(b, a) = \frac{1}{a}$

π_+, π_- représentations continues de G sur $L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t})$

$$\pi_{\pm}(b, a) \xi(s) = e^{\mp 2\pi i b s} \xi(as)$$

Si $f \in L^1(G)$, $\mathcal{F}_{\pm}(f) = \mathcal{T}_{\pm}(f)$

$$\mathcal{F}_{\pm}(f) \xi(s) = \int f(b, a) \pi_{\pm}(b, a) \xi(s) \frac{da db}{a^2}$$

Si f est assez régulier

$$\mathcal{P}_{\pm}(f) = \mathcal{S} \mathcal{F}_{\pm}(\Delta^{\pm \frac{1}{2}} f)$$

où $\mathcal{S}: D(\mathcal{S}) \rightarrow H$

$$\mathcal{S} \mapsto \sqrt{t} \xi(t)$$

$$\mathcal{P}_{\pm}(f) \xi(s) = \sqrt{s} \iint \sqrt{a} f(b, a) e^{\mp 2\pi i b s} \xi(as) \frac{da db}{a^2}$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s f(b \frac{t}{s}) e^{\mp 2\pi i b s} \xi(t) \sqrt{t/b} \frac{dt}{t^2}$$

$$= \mathcal{F}_{\pm}(f) \mathcal{S} \xi(t)$$

Si $f(b, a) = \varphi(b) \psi(a)$, $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$, $\psi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}_+^*)$

$$\int_0^{\infty} \varphi(\pm s) s \frac{\psi(\frac{t}{s})}{\sqrt{t}} \frac{dt}{t}$$

Notations $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_+, \mathcal{F}_-): L_1(G) \rightarrow \mathcal{B}(H) \oplus \mathcal{B}(H)$

$\mathcal{P} = (\mathcal{P}_+, \mathcal{P}_-): \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B}(H) \oplus \mathcal{B}(H)$

Théorème P s'étend en une isométrie surjective de $L^2(G)$ sur $S^2(H) \oplus S^2(H)$.

preuve On sait que $S^2(H) \stackrel{\text{isom.}}{\cong} L^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \frac{dt}{t} \otimes \frac{dt}{t})$

$$f \in H, \quad T_k f(s) = \int_0^\infty k(s,t) f(t) \frac{dt}{t}$$

définit une bijection

$$\overleftarrow{T}_k \longleftrightarrow k$$

$$U: L^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*)$$

$$k \mapsto k(s,t)$$

est un unitaire.

$$U(\hat{\varphi}(\pm s) \sum_{t \in \mathbb{R}_+^*} \varphi(\frac{t}{s})) = \hat{\varphi}(\pm s) \sum_{t \in \mathbb{R}_+^*} \frac{\varphi(t)}{t} = \sqrt{s} \hat{\varphi}(\pm s) \frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}}$$

$$\text{Si } \varphi_1, \varphi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*), \psi_1, \psi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$$

$$f_i \psi_i = \varphi_i \psi_i \quad i=1,2$$

On a (calcul fait par Guixiang)

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \dots = \langle P(f_1), P(f_2) \rangle_{S^2(H) \oplus S^2(H)}$$

$$\|P_+(f)\|_{S^2(H)}^2 = \left\| \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{tr. de Fourier sur } \mathbb{R}}}{\mathbb{F}_{\text{réels}}} \otimes 1 \right) (f) \right\|_{L^2(G)}^2$$

□

Théorème ① $VN(G) \cong B(H) \oplus B(H)$

$$\textcircled{2} \lambda \cong \frac{\pi_+ \oplus \pi_-}{\pi_+ \oplus \pi_-} \quad (\text{unitairement équivalent})$$

$$(\pi_+ \otimes \mathbb{1}_H) \oplus (\pi_- \otimes \mathbb{1}_H)$$

preuve

$$\textcircled{2} \quad L^2(G) \xrightleftharpoons[P^*]{P} S^2(H) \oplus S^2(H)$$

il suffit de prouver $f \in L^2(G)$ régulier

$$(\pi_+(x), \pi_-(x)) P_+(f) = \left(\underbrace{\pi_+(x) \mathbb{F}_+(\lambda \delta)}_{\mathbb{F}_+(\lambda x \lambda) \delta}, \underbrace{\pi_-(x) \mathbb{F}_-(f) \delta}_{\mathbb{F}_-(\lambda x \lambda) f \delta} \right)$$

$$= \mathcal{P}(\lambda(x)I)$$

$\mathcal{P} \lambda(x) \mathcal{P} =$ opérateur $\pi_+(x) \oplus \pi_-(x)$ qui agit sur $\mathcal{B}(S^2(H) \oplus S^2(H))$ à gauche si on identifie $S^2(H) \subseteq H \otimes H$, alors

$$\mathcal{P} \lambda(x) \mathcal{P}^* \simeq (\pi_+ \otimes 1) \oplus (\pi_- \otimes 1)$$

① On pose $M_g = \mathcal{B}(H) \oplus \mathcal{B}(H) \subseteq \mathcal{B}(S^2(H) \oplus S^2(H))$ par multiplication à gauche

$$= \left\{ L_{A,B} : S^2(H) \oplus S^2(H) \rightarrow S^2(H) \oplus S^2(H) \right. \\ \left. (X,Y) \mapsto (AX, AY) \right\}$$

$$M_d = \left\{ R_{A,B} : (X,Y) \mapsto (XA, YB) \right\}$$

Fait

$$M_d = M_g', \quad M_g = M_d'$$

Par ② on a $\mathcal{P} \lambda(x) \mathcal{P}^* \in M_g \quad \forall x \in G$

et donc $\mathcal{P} W(G) \mathcal{P}^* \in M_g$

$$\mathcal{P} W(G) \mathcal{P}^* \in M_g$$

Mais on fait si $g(x) \in \mathcal{B}(L^2(G))$,

$$g(x)g(t) = \sqrt{\Delta(x)} g(tx),$$

$$\mathcal{P} g \mathcal{P}^* = R_{\pi_+(x), \pi_-(x)} \quad \text{par le même calcul}$$

donc

$$\mathcal{P} g(G) \mathcal{P}^* \subseteq M_d$$

en prenant le commutant, $\mathcal{P} g(G)' \mathcal{P}^* \supseteq M_d'$

$$(\mathcal{P} g(G) \mathcal{P}^*)'$$

Or $g(G)' = W(G)$ (admis dans l'exposé de Xia)

$$\mathcal{P} W(G) \mathcal{P}^* \supseteq M_g$$

donc

$$\mathcal{P} W(G) \mathcal{P}^* = M_g = \mathcal{B}(H) \oplus \mathcal{B}(H) \quad \square$$

Le prédual de $VN(G)$

Si $\omega \in VN(G)_*$ alors ω induit une fonction continue sur G , $\varphi_\omega: G \ni x \mapsto \omega(\lambda(x))$.

Remarque $\varphi_\omega \in B(G)$ et $\|\varphi_\omega\|_{B(G)} = \|\omega\|_{VN(G)_*}$

$$B(G) = \left\{ \varphi: G \rightarrow \mathbb{C} \text{ continue s.t. } \exists \pi \text{ rep. unitaire } G \rightarrow H_\pi, \right. \\ \left. \exists \xi, \eta \in H_\pi \text{ s.t. } \varphi(x) = \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle \right\}$$

$$\|\varphi\|_{B(G)} = \inf_{\pi, \xi, \eta} \|\xi\|_{H_\pi} \|\eta\|_{H_\pi}$$

Rappel $B(G)$ est une algèbre de Banach

$$B(G) \cong (C^*(G))^*$$

pour la dualité qui étend

$$\text{si } f \in L^1(G) \hookrightarrow C^*(G)$$

$$\langle f, \varphi \rangle = \int f(x) \varphi(x) dx$$

$\uparrow$
mesure de Haar

$$\|f\|_{C^*(G)} = \sup_{\substack{\text{rep. unitaires} \\ \text{cont. de } G}} \|\pi(f)\|$$

Preuve de la remarque

Comme ω est ultra faiblement continue,

$$\|\omega\| = \|\omega|_{C_\lambda^*(G)}\|_{C_\lambda^*(G)^*}$$

où $C_\lambda^*(G) =$ adhérence de $L^1(G)$

dans $VN(G)$ pour $\|\cdot\|$

Mais $C_\lambda^*(G) \twoheadrightarrow C_\lambda^*(G)$ *-hom. surjectif.

donc

$$i: (C_\lambda^*(G))^* \hookrightarrow C_\lambda^*(G)^* \text{ inclusion isométrique}$$

$$\text{donc } \|\omega\| = \|i(\omega|_{C_\lambda^*(G)})\|_{C_\lambda^*(G)^*} = \|\varphi_\omega\|_{B(G)} \text{ par le rappel.}$$

Déf On note $A(G) = \{ \varphi_w, w \in VN(G)_* \}$
 $A(G)$ est un sous-espace fermé de $B(G)$.

Théorème $\forall \varphi \in A(G) \exists g, h \in L^2(G) \text{ t.q.}$
 $\varphi = g * \tilde{h}$ où $\tilde{h}(x) = \overline{h(x^{-1})}$
 et $\|\varphi\|_{A(G)} = \|g\|_2 \|h\|_2$

Rem: Ce théorème est vrai pour tout groupe G localement compact.

facile: si $g, h \in L^2_1$, $g * \tilde{h} \in A(G)$ et $\|g * \tilde{h}\|_{A(G)} \leq \|g\|_2 \|h\|_2$

Preuve

$$\begin{aligned} g * \tilde{h}(x) &= \int_G g(y) \tilde{h}(y^{-1}x) dy \\ &= \int_G g(y) \overline{h(x^{-1}y)} dy \\ &= \langle g, \lambda(x) h \rangle_{L^2(G)} \end{aligned}$$

Plus généralement, $\forall f \in L^1(G)$

$$\int f(x) (g * \tilde{h})(x) dx = \langle g, \lambda(f) h \rangle$$

Assez facile:

Boule unité de $A(G)$ = enveloppe ~~linéaire~~ convexe fermée
 des $g * \tilde{h}$, $g, h \in L^2(G)$,
 $\|g\|_2 = \|h\|_2 = 1$

Pas évident: on n'a pas besoin de l'enveloppe convexe, (ni de la fermeture).

Preuve du théorème pour le cas particulier $G = \text{ar+b}$:

$$\begin{aligned} \text{Soit } w \in VN(G)_* &= (B(H) \oplus B(H))_* \\ &= S^1(H) \oplus S^1(H) \end{aligned}$$

$$S^1(H) = \{A \in B(H), \operatorname{Tr} |A| < \infty\}$$

Soit $A_+ \oplus A_- \in S^1(H) \oplus S^1(H)$ qui correspond à ω
 $\|A_+\|_1 + \|A_-\|_1 = 1$

décomposition polaire

$$A_{\pm} = U_{\pm} |A_{\pm}|$$

$$= \underbrace{U_{\pm} |A_{\pm}|^{1/2}}_{\text{de norme } \sqrt{\|A_{\pm}\|_1} \text{ dans } S^2(H)} |A_{\pm}|^{1/2}$$

donc il existe $f, g \in L^2(G), \|f\|_2 = \|g\|_2 = 1$

$$\text{t.q. } P(f) = (U_+ |A_+|^{1/2}, U_- |A_-|^{1/2})$$

$$\text{et } P(g) = (|A_+|^{1/2}, |A_-|^{1/2})$$

$$\omega(\lambda(x)) = \langle \underbrace{P \lambda(x) P^*}_{B(H) \oplus B(H)}, \underbrace{A_+ \oplus A_-}_{S^1(H) \oplus S^1(H)} \rangle$$

$$= \operatorname{Tr} \otimes \operatorname{Tr} (P \lambda(x) P^* \underbrace{A_+ \oplus A_-}_{P(f)P(g)})$$

$$= \langle P \lambda(x) P^* P(f), P(g)^* \rangle$$

"P(g) car P(g) est
auto-adjoint
(même pos.)"

$$= \langle \lambda(x) f, g \rangle$$

$$= \overline{\langle g, \lambda(x) f \rangle}$$

$$\text{donc } \varphi_{\omega} = \overline{g \otimes f}$$

□

"Observation: Si G est "gentil":

$\forall f \in L^1(G), \mathcal{F}(f)$ est un $\rightarrow$ linéaire
opérateur compact

$$(\Rightarrow) C_{\lambda}^*(G) \subset \mathcal{K}(L^2(G))$$

Théorème $G = ax + b$ n'est pas linéaire.

Plus précisément, si $T \in VN(G)$

(i) $\Phi(T)$ est compact $\Leftrightarrow$ (ii) $T \in C_\lambda^*(G)$ et $\hat{\sigma}(T) = 0$

(iii) T est limite en norme de $\lambda(f_i)$ où $f_i \in L^1(G)$ t.q. $\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(b, a) db = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^*$

$\sigma(f) \in L^1(\mathbb{R}_+^*, \frac{da}{a})$ si $f \in L^1(G)$

$\lambda(f) \mapsto \hat{\sigma}(f)$

$\lambda(f) \mapsto \hat{\sigma}(f)$

$\hat{\sigma}(f_i)(a) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(b, a) db$

Fait: σ s'étend en une application linéaire continue, notée $\hat{\sigma}$, de $C_\lambda^*(G)$ sur $C_\lambda^*(\mathbb{R}_+^*)$

formellement Si $u \in A(\mathbb{R}_+^*) \simeq VN(\mathbb{R}_+^*)_*$, $T \in C_\lambda^*(G)$

on définit

$$\langle \hat{\sigma}(T), u \rangle = \langle T, \underbrace{u \circ j}_{\in B(G)} \rangle$$

$$N = \{(b, 1), b \in \mathbb{R}\} \triangleleft G$$

sous-groupe distingué

$$G/N \simeq \mathbb{R}_+^*$$

$$j: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

appl. quotient

Lemme 1 π_1, π_2 sont irréductibles

(dém. la semaine prochaine dans l'exposé de François)

Lemme 2 Si $f \in L^1(G)$, $\sigma(f) = 0 \Rightarrow \hat{F}_+(f) \in \mathcal{K}(H)$

Lemme 3 $\hat{F}(\text{Ker}(\sigma))$ est dense dans $\mathcal{K}(H)$

Lemme 4 Si $\sigma(f) = 0$ et $\hat{F}(f) = (A, B)$

alors il existe $g \in L^2(G)$ t.q. $\sigma(g) = 0$

et $\hat{F}(g) = (A, 0)$.

Preuve du théorème en admettant les lemmes

On prouve seulement $(iii) \Leftrightarrow (i)$

$(iii) \Rightarrow (i)$ par le lemme 2, si

$$f_i \in L^1(G), \sigma(f_i) = 0$$

$$F(f_i) \in K(H) \otimes K(H)$$

$$\text{mais } \Phi(T) = \lim \Phi(\lambda f_i) \quad \text{car } \Phi \text{ est isométrique}$$
$$= \lim F(f_i) \text{ en norme}$$

$$\in K(H) \otimes K(H) \quad \text{car } K(H) \otimes K(H) \text{ est fermé}$$

$(i) \Rightarrow (iii)$ Comme Φ est injective, il suffit

de prouver que $\forall A \otimes B \in K(H) \otimes K(H)$

$$\exists f_i \in L^1(G), \sigma(f_i) = 0 \text{ t.q. } F(f_i) \rightarrow A \otimes B$$

par linéarité il suffit de traiter le

cas où $A=0$ ou $B=0$.

B.O. Par le lemme 3 $\exists f_i \in L^1(G), \sigma(f_i) = 0$

$$\text{t.q. } F(f_i) \rightarrow A$$

Par le lemme 4, $\exists g_i \in L^1(G), \sigma(g_i) = 0$

$$\text{t.q. } F_+(g_i) = F_+(f_i), \quad F_-(g_i) = 0,$$

g_i convergent.

□

Preuve du lemme 2

Par un argument de densité et de linéarité il suffit de le vérifier si $f(b, a) = \varphi(b) \psi(a)$, $\varphi, \psi \in C_c^\infty$ avec $\hat{\varphi} \equiv 0$ au voisinage de 0.

$$F_+(f) \hat{\varphi}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{\psi(t/s)}{t/s}}_{= \hat{\psi}(s, t)} \hat{\varphi}(s) \varphi(t) \frac{dt}{t}$$

en fait on a même $h \in L^2(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2)$,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left| \frac{\psi(t,s)}{ts} \right|^2 \frac{dt}{t} \frac{ds}{s}$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \left| \frac{\psi(u)}{u} \right|^2 \left| \hat{\varphi}(s) \right|^2 \frac{ds}{s} \frac{du}{u} < \infty$$

car $\hat{\varphi}(s)$ s'annule dans un voisinage de 0

Preuve du lemme 3

σ est un homomorphisme

$$(\text{i.e. } \sigma(f * g) = \sigma(f) * \sigma(g))$$

$\ker \sigma$ est un idéal de $L^1(G)$,

et $\overline{F_*(\ker \sigma)}$ est un idéal de $C^*(\pi_*(L^1(G)))$

$$\overline{F_*(\ker \sigma)} \subset \mathcal{K}(H)$$

On a $\overline{F_*(\ker \sigma)}$ est un idéal de $B(H)$, contenu dans $\mathcal{K}(H)$

En effet, si $A \in \overline{F_*(\ker \sigma)}$

$$B \in B(H)$$

est-ce que $BA \in \overline{F_*(\ker \sigma)}$?

Oui, par Kaplansky

$$\exists f_i \in L^1(G) \text{ i.q. } \pi_*(f_i) \xrightarrow{\sigma \circ \tau} B$$

$$\text{et } \|\pi_*(f_i)\| \leq \|B\|$$

alors, comme A est compact

$$\pi_*(f_i)A \longrightarrow BA$$

$$\in \overline{F_*(\ker \sigma)}.$$

Le seul idéal non nul de $B(H)$ contenu dans $\mathcal{K}(H)$ est $\mathcal{K}(H)$,

$$\text{donc } \overline{F_*(\ker \sigma)} = \mathcal{K}(H)$$

□

Corollaire: Soit $\varphi \in B(G)$, $G = ax+b$

$\varphi \in A(G) \Leftrightarrow \varphi$ tend vers 0 à l'infini.

Remarque: Si $G = \mathbb{R}$, c'est faux

$$A(\mathbb{R}) = \{ \hat{f}, f \in L^1(\mathbb{R}) \}$$

$$B(\mathbb{R}) = \{ \hat{\mu}, \mu \text{ mesure bornée sur } \mathbb{R} \}$$