Représentations du groupe $ax + b$

François Lemeux

Résumé

On veut déterminer les représentations unitaires irréductibles du groupe $ax+b$. Pour cela, on va étudier un peu plus généralement ces représentations sur les groupes du type $G = N \ltimes H$, où N est un sous groupe abélien fermé de G, lui même localement compact.

La première partie de ce papier définit la représentation induite d'un sous groupe fermé H d'un groupe localement compact G, puis nous étudions deux exemples qui nous servirons pour l'étude du groupe $ax+b$. Pour montrer que les représentations étudiées dans l'exemple que nous évoquons sont les seules, nous introduisons en deuxième partie la notion de système d'imprimitivité, et on montrera le théorème d'imprimitivité, central dans notre propos. Enfin, on donnera les résultats sur les représentations des groupes localement compacts du type $G = N \ltimes H$, comme annoncé.

1 La représentation induite

Dans tout ce qui suit, on adopte les notations suivantes. Soit G un groupe localement compact, H un sous-groupe fermé et $q : G \to G/H$, l'application quotient canonique. On se donne également une représentation unitaire σ de H sur un espace de Hilbert H_σ. On note la norme et le produit scalaire sur H_σ par $||.||_\sigma$ et $<,>_\sigma$ et $C(G, H_\sigma)$ l'espace des fonctions continues de G vers H_σ. On note $d\eta$ la mesure de Haar sur H et dx celle sur G.

Pour construire la représentation induite on va utiliser l'espace de fonctions suivant :

$$\mathscr{F}_0 = \big\{ f \in C(G, H_\sigma) : q(\mathrm{supp} f) \text{ compact et } f(x\xi) = \sigma(\xi^{-1}) f(x) \ \forall x \in G, \xi \in H \big\}.$$

On a besoin de résultats sur les groupes localement compacts avant de poursuivre :

1.A Groupes localement compacts

Lemme 1. *Si $E \subset G/H$ est compact alors il existe un compact $K \subset G$ tel que $q(K) = E$.*

Preuve. Soit V un voisinage ouvert de 1 dans G, relativement compact. L'application q est ouverte, donc les ensembles $q(xV)$ $(x \in G)$ sont des ouverts recouvrant E. On en extrait un sous-recouvrement fini $q(x_j V)$, $j = 1, .., n$ et on pose $K = q^{-1}(E) \cap \bigcup_j x_j \overline{V}$. Alors K est compact car fermé ($q^{-1}(E)$ est fermé) dans $\overline{V}$ et on a bien $q(K) = E$. ■

Lemme 2. *On considère l'application $P : C_c(G) \to C_c(G/H)$ définie par :*

$$Pf(xH) = \int_H f(x\eta) d\eta.$$

(Noter que cette application est bien définie car $d\eta$ est invariante à gauche et qu'elle est continue). Si $F \subset G/H$ est compact, alors il existe $f \geq 0$ dans $C_c(G)$ telle que $Pf = 1$ sur F.

Preuve. Soit E un voisinage compact de F dans G/H. On applique le lemme précédent et on trouve un compact $K \subset G$ tel que $q(K) = E$. On se donne $g \in C_c(G)$ telle que $g > 0$ sur K et $\phi \in C_c(G/H)$ de support inclus dans E et $\phi = 1$ sur F. On pose alors :

$$f = \frac{\phi \circ q}{Pg \circ q} g$$

avec la convention que la fraction est nulle quand le numérateur est nul. f est continue puisque $Pg > 0$ sur le support de ϕ, son support est contenu dans celui de g, et $Pf = (\phi/Pg)Pg = \phi$. ■

Proposition 3. *Si $\phi \in C_c(G/H)$, il existe $f \in C_c(G)$ telle que $Pf = \phi$ et $q(suppf) = supp\phi$. On a de plus $\phi \geq 0 \Longrightarrow f \geq 0$.*

Preuve. Admis. cf. Folland p.56 ■

Théorème 4. *G/H possède une mesure de radon $G-$invariante μ si et seulement si $\Delta_G|H = \Delta_H$. Dans ce cas, μ est unique à un facteur multiplicatif près et si ce dernier est correctement choisi, on a :*

$$\int_G f(x)dx = \int_{G/H} Pf d\mu = \int_{G/H}\int_H f(x\eta)d\eta d\mu(xH)$$

Preuve. Admis. cf Folland p.57 ■

Proposition 5. *Si μ est une mesure invariante sur G/H alors $\mu(U) > 0$ pour tout ouvert non vide U de G/H.*

Preuve. Admis. cf. Folland p.61 ■

1.B Représentation induite

Proposition 6. *Si $\alpha : G \to H_\sigma$ est continue et de support compact alors la fonction :*

$$f_\alpha(x) = \int_H \sigma(\eta)\alpha(x\eta)d\eta$$

est dans $\mathscr{F}_0$ et est uniformément continue sur G. De plus tout élément de $\mathscr{F}_0$ est de la forme f_α pour un certain $\alpha \in C(G, H_\sigma)$.

Preuve. On a clairement $q(\text{supp } f_\alpha) \subset q(\text{supp } \alpha)$ donc $q(\text{supp}(f_\alpha))$ est compact. De plus :

$$f_\alpha(x\xi) = \int_H \sigma(\eta)\alpha(x\xi\eta)d\eta = \int_H \sigma(\xi^{-1}\eta)\alpha(x\eta)d\eta = \sigma(\xi^{-1})f_\alpha(x).$$

Ainsi pour prouver la première assertion il reste à montrer que f_α est uniformément continue sur G. On fixe donc N un voisinage compact de 1 dans G, et soit $K \subset G$ un compact tel que $q(K) = q(\text{supp } \alpha)$ et soit $J = K^{-1}N(\text{supp } \alpha) \cap H$. Soit $\epsilon > 0$. On se donne $N_\epsilon \subset N$ un voisinage de 1 tel que $||\alpha(x) - \alpha(y)||_\sigma < \epsilon$ pour y tel que $xy^{-1} \in N_\epsilon$ (uniforme continuité de α sur N compact). Alors pour $x \in K$ et $xy^{-1} \in N_\epsilon$,

$$||f_\alpha(x) - f_\alpha(y)||_\sigma = \left|\left|\int_J \sigma(\eta)[\alpha(x\eta) - \alpha(y\eta)]d\eta\right|\right|_\sigma \leq \epsilon|J|. \quad (||\sigma|| \leq 1).$$

Ainsi f_α est uniformément continue sur K. Par conséquent f_α est aussi uniformément continue sur KH puisque $f_\alpha(x\xi) = \sigma(\xi^{-1})f_\alpha(x)$ pour $\xi \in H$. De plus, puisque $f_\alpha = 0$ en dehors de KH (par construction de $K : [K] = KH = [\text{supp } \alpha]$), f_α est uniformément continue sur G.

D'autre part, si l'on se donne $f \in \mathscr{F}_0$, alors il existe $\psi \in C_c(G)$ telle que $\int_H \psi(x\eta)d\eta = 1$ pour $x \in \text{supp} f$ ($x\eta \in (\text{supp } f)H$; on applique le lemme 2 avec $F = q(\text{supp}(f))$). On pose $\alpha = \psi f$. Alors $\forall x \in G$:

$$f_\alpha(x) = \int_H \psi(x\eta)\sigma(\eta)f(x\eta)d\eta = \int_H \psi(x\eta)\sigma(\eta)\sigma(\eta^{-1})f(x)d\eta = \int_H \psi(x\eta)f(x)d\eta = f(x).$$

■

G agit sur $\mathscr{F}_0$ par translation à gauche $f \mapsto L_x f$, on obtient alors une représentation unitaire de G si l'on peut trouver un produit scalaire sur $\mathscr{F}_0$ tel que ces translations soient des isométries.

1. On va supposer dans un premier temps que G/H admet une mesure $G-$invariante μ (unique par le théorème 4). Alors si $f, g \in \mathscr{F}_0$, le produit scalaire $< f(x), g(x) >_\sigma$ ne dépend que de la classe $q(x)$ car σ est unitaire et f, g vérifient les égalités $f(x\xi) = \sigma(\xi^{-1})f(x)$, $g(x\xi) = \sigma(\xi^{-1})g(x)$. Ainsi, ceci définit une fonction de $C_c(G/H)$ que l'on peut intégrer par rapport à la mesure μ et l'on pose :

   $$< f, g >= \int_{G/H} < f(x), g(x) >_\sigma d\mu(xH).$$

   C'est un produit scalaire sur $\mathscr{F}_0$ (il est défini positif par la proposition 5) et il préserve les translations à gauche puisque μ est invariante. Ainsi, si l'on note $\mathscr{F}$ le complété hilbertien de $\mathscr{F}_0$, alors les translations L_x s'étendent en des opérateurs unitaires sur $\mathscr{F}$. De plus, la proposition 6 permet de montrer que l'application $x \mapsto L_x f$ est continue de G dans $\mathscr{F}$ pour toute $f \in \mathscr{F}_0$ [en effet :

   $$||L_x f - L_y f||_{\mathscr{F}} = \int_{G/H} ||(L_x f - L_y f)(z)||_\sigma^2 d\mu(zH) = \int_{\text{supp}(\alpha)} \left|\left|\int_H \sigma(\eta)[\alpha(xz\eta) - \alpha(yz\eta)]d\eta\right|\right|_\sigma^2 d\mu(zH)$$

   et l'on se sert de la démonstration de la proposition 6)].

De plus, comme les opérateurs L_x sont uniformément bornés ($||L_x|| = 1$), ils sont fortement continus sur tout $\mathscr{F}$(approximer un élément de $\mathscr{F}$ par un élément de $\mathscr{F}_0$ puis majorer la norme de $||L_x f - L_y f||$ en passant par $L_x g, L_y g$ en utilisant la continuité des $x \mapsto L_x g$ pour $g \in \mathscr{F}_0$ et le fait que les L_x sont uniformément bornés). Ainsi, ils définissent une représentation unitaire sur G, appelée représentation induite par σ et notée : $ind_H^G(\sigma)$

Exemple 7. *Soit σ la représentation triviale de H sur $\mathbb{C}$ ($\sigma(g) = id_{\mathbb{C}}$). Alors $\mathscr{F}_0$ est composé de fonctions constantes sur les classes à gauche de H, ainsi on l'identifie avec $C_c(G/H)$. La même identification donne que $\mathscr{F}$ est $L^2(G/H)$ et alors $ind_H^G(\sigma)$ est simplement la représentation de G sur $L^2(G/H)$ par translations à gauche.*

2. On va maintenant traiter le cas général, c'est à dire ne pas supposer a priori que G/H possède une mesure invariante. On modifie l'espace $\mathscr{F}_0$ en $\mathscr{F}^0$ l'espace des fonctions $f : G \to H_\sigma$ telles que $q(\text{supp}(f))$ est compact et

$$f_\alpha(x) = \sqrt{\frac{\Delta_G(\eta)}{\Delta_H(\eta)}}\sigma(\eta^{-1})f(x), \quad x \in G,\ \eta \in H.$$

On commence par l'analogue de 6 :

Proposition 8. *Si $\alpha : G \to H_\sigma$ est continue à support compact, alors la fonction*

$$f_\alpha(x) = \int_H \sqrt{\frac{\Delta_G(\eta)}{\Delta_H(\eta)}}\sigma(\eta)\alpha(x\eta)d\eta$$

est dans $\mathscr{F}^0$ et uniformément continues sur G. De plus, toute fonction de $\mathscr{F}^0$ est de la forme f_α pour un certain $\alpha \in C(G, H_\sigma)$.

Preuve. Identique à celle de la proposition 6. ■

On considère l'application canonique décrite dans le lemme 2, $P : C_c(G) \to C_c(G/H)$, définie par :

$$P\phi(xH) = \int_H \phi(x\eta)d\eta.$$

Si $f \in \mathscr{F}^0$, alors l'application

$$P\phi \mapsto \int_G \phi(x)||f(x)||_\sigma^2 dx, \quad \phi \in Cc(G)$$

est une fonctionnelle bien définie et positive sur $C_c(G/H)$ par la proposition 3. Ainsi (Riesz), il existe une mesure de Radon μ_f sur G/H telle que $\int P\phi d\mu_f = \int \phi||f||_\sigma^2$ pour tout $\phi \in C_c(G)$. Puisque $\int \phi||f||_\sigma^2 = 0$ si $\text{supp}\phi \cap \text{supp} f = \emptyset$, le support de μ_f est contenu dans $q(\text{supp} f)$ donc compact. Ainsi, en particulier $\mu_f(G/H) < \infty$.

L'identité de polarisation appliqué à $<,>_\sigma$ donne, pour $f, g \in \mathscr{F}^0$, une mesure de Radon positive $\mu_{f,g}$ sur G/H telle que :

$$\int_{G/H} P\phi d\mu_{f,g} = \int_G \phi(x) < f(x), g(x) >_\sigma dx, \quad \phi \in C_c(G).$$

Précisément, $\mu_{f,g} = \frac{1}{4}(\mu_{f+g} - \mu_{f-g} + i\mu_{f+ig} - i\mu_{f-ig})$. On définit alors :

$$< f, g >= \mu_{f,g}(G/H).$$

Cette formule définit un produit scalaire sur $\mathscr{F}^0$. On note $\mathscr{F}$ le complété hilbertien de $\mathscr{F}^0$, et calculons la norme d'une fonction $f \in \mathscr{F}$. Pour cela, on utilise le lemme 2 : il existe $\phi \in C_c(G)$ telle que $P\phi = 1$ sur $q(\text{supp} f)$; Alors :

$$||f||^2 = \int_{q(\text{supp} f)} P\phi d\mu_{f,g} = \int_G \phi(x)||f(x)||_\sigma^2 dx$$

(Cette formule justifie a posteriori que $<,>$ est un produit scalaire). On définit alors pour $x \in G$, l'opérateur $\Pi(x)$ sur $\mathscr{F}^0$ par :

$$[\Pi(x)]f(y) = f(x^{-1}y).$$

Alors $\Pi(x)$ est bijective sur $\mathscr{F}_0$, et on a :

$$\begin{aligned}
\int_{G/H} P\phi(p)d\mu_{\Pi(x)f}(p) &= \int_G ||f(x^{-1}y)||_\sigma^2 \phi(y)dy \\
&= \int_G ||f(y)||_\sigma^2 L_x\phi(y)dy \\
&= \int_{G/H} P(L_x\phi)d\mu_f \\
&= \int_{G/H} P\phi(xp)d\mu_f(p)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mu_{\Pi(x)f}$ est la translatée (de x) de μ_f, on obtient alors :

$$||\Pi(x)f||^2 = \mu_{\Pi(x)f}(G/H) = \mu_f(x^{-1}(G/H)) = \mu_f(G/H) = ||f||^2$$

(l'avant dernière égalité provient du fait que μ_f est une mesure de radon). En conclusion, $\Pi(x)$ est une isométrie, qui s'étend en un opérateur unitaire sur $\mathscr{F}$. La représentation de G sur $\mathscr{F}$ ainsi obtenue est appelée la représentation induite par σ.

Remarque 9. *Par le théorème 4, si G/H admet une mesure invariante alors $\mathscr{F}^0 = \mathscr{F}_0$ (les fonctions modulaires coincident) et $d\mu_f(xH) = ||f(x)||_\sigma^2 d\mu(xH)$. Donc les constructions précédentes coincident.*

Exemple 10. *On considère le groupe $ax+b$ noté G. On rappelle que $G = N \ltimes H$ avec $N = \{(1,b) : b \in \mathbb{R}\}$ et $H = \{(a,0) : a > 0\}$. On détermine les représentations induites de N à G par le caractère $< b, 1 >= e^{2i\pi b}$ et par le caractère trivial sur N :$< b, 0 >= 1$. Pour ce dernier c'est aisé puisqu'alors la représentation induite sur G provient d'une représentation irréductible de $G/N \simeq \mathbb{R}_+^*$ i.e. est de degré 1 et donnée par $\pi(a,b) = a^{i\lambda},\ \lambda \in \mathbb{R}$.*

Pour le premier, on procède comme suit : L'espace $G/G_1 = G/N \simeq H$ admet une mesure $G-$invariante, i.e. la mesure de Haar da/a sur H. L'espace de Hilbert $\mathscr{F}$ pour π^+ est donc composé des fonctions $f : G \to \mathbb{C}$ telles que :

$$f(a, b + ab') = f((a,b)(1,b')) = \sigma(\xi^{-1})f(x) = e^{-2i\pi b'}f(a,b),$$

muni de la norme $||f||^2 = \int_0^\infty |f(a,b)|^2 \frac{da}{a}$. Si l'on prend $b = 0$ et qu'on écrit b/a à la place de b', on a

$$f(a,b) = e^{-2i\pi b/a}f(a,0) \qquad (*).$$

Les fonctions de $\mathscr{F}$ sont donc déterminées par leurs valeurs sur $H = \{(a,0)\}$ et si l'on pose :

$$f_0(t) = f(t,0),$$

l'application $f \mapsto f_0$ est unitaire de $\mathscr{F}$ vers $L^2(]0,+\infty[, dt/t)$, d'inverse donné par $f(a,b) = e^{-2i\pi b/a}f_0(a)$.

La représentation π^+ est donnée (cf. la construction au 1.) par :

$$[\pi^+(a,b)f](c,d) = f((a,b)^{-1}(c,d)) = f(a^{-1}c, a^{-1}(d-b)).$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}
[\pi^+(a,b)f](c,d) &= e^{-2i\pi d/c}[\pi^+(a,b)f]_0(c) \\
f(a^{-1}c, a^{-1}(d-b)) &= e^{2i\pi(b-d)/c}f_0(a^{-1}c).
\end{aligned}$$

(dernière égalité obtenue avec $(*)$). Ainsi, en conjuguant π^+ avec l'application $f \mapsto f_0$, on obtient une représentation de $L^2(]0,+\infty[, dt/t)$ équivalente à π :

$$\widetilde{\pi}^+(a,b)f_0(t) = e^{2i\pi b/t}f_0(a^{-1}t).$$

On pose alors $s = t^{-1}$ et $g_0(s) = f_0(s^{-1}) = f_0(t)$, on a alors :

$$\widetilde{\pi}^+(a,b)g_0(t) = \widetilde{\pi}^+(a,b)f_0(t^{-1}) = e^{2i\pi bt}f_0(a^{-1}t^{-1}) = e^{2i\pi bt}g_0(at),$$

et :

$$||g_0|| = \int_0^{+\infty} |g_0(t)|^2 \frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} |f_0(t^{-1})|^2 \frac{dt}{t} = \int_{+\infty}^0 |f_0(s)|^2 \frac{-ds}{s} = \int_0^{+\infty} |f_0(s)|^2 \frac{ds}{s} = ||f_0||$$

2 Systèmes d'imprimitivité

Quelques rappels sur les groupes localement compacts :

2.A Groupes localement compacts

Définition 11. *(Projection Valued mesure=PVM). Soit G un groupe localement compact. Une PVM sur un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ est une application P définie sur les boréliens de G et vérifiant :*

1. *Les $P(E)$ sont des projections orthogonales de $\mathscr{H}$.*
2. *$P(\emptyset) = 0$ et $P(G) = I$.*
3. *$P(E \cap F) = P(E)P(F)$.*
4. *Si $E_1, E_2, \ldots$ sont disjoints alors $P(\bigcup E_j) = \sum P(E_j)$ où la série converge pour la topologie d'opérateur forte.*

Définition 12. *Soit G un espace localement compact et S un espace localement compact séparé. Une action à gauche de G sur S est une application continue $(x, s) \mapsto xs$ de $G \times S$ dans S telle que :*

1. *$s \mapsto xs$ est un homéomorphisme de S, pour tout $x \in G$ fixé.*
2. *$x(ys) = (xy)s \ \forall x, y \in G, \forall s \in S$*

Un espace S muni d'une telle action est appelé $G-$espace. Un $G-$espace est dit transitif si pour tous $s, t \in S$ il existe $x \in G$ tel que $xs = t$.

Exemple 13. *Soit G un espace localement compact, H un sous-groupe fermé de G. Alors l'action de G sur G/H par translation à gauche fait de G/H un $G-$espace.*

Définition 14. *Soit G un groupe localement compact. Un système d'imprimitivité sur G et un triplet (π, S, P) tel que :*

1. *π est une représentation unitaire de G sur un espace de Hilbert H_π.*
2. *S est un $G-$espace.*
3. *P est une PVM régulière sur S telle que $\pi(x)P(E)\pi(x)^{-1} = P(xE), \forall x \in G, \ \forall E \subset S$*

Remarque 15. *On peut adopter un autre point de vue pour décrire un système d'imprimitivité. La PVM P définit une $*-$représentation non dégénérée M de la C^*-algèbre $C_0(S)$ sur H_π, précisément : $M(\phi) = \int \phi dP, \ \phi \in C_0(S)$. On obtient alors :*

$$\pi(x)dP(s)\pi(x)^{-1} = dP(xs)$$

d'où :

$$\pi(x)M(\phi)\pi(x^{-1}) = M(L_x\phi), \qquad L_x\phi(s) = \phi(x^{-1}s). \quad (3.')$$

On remplace alors la condition 3. ci-dessus par la condition 3.' que l'on vient d'établir.

Définition 16. *On dit qu'une représentation est "d'imprimitivité" si elle appartient à un système d'imprimitivité non trivial.*

Proposition 17. *Toute représentation induite d'un groupe localement compact est d'imprimitivité.*

Preuve. On rappelle les notations : Soit H un sous-groupe fermé de G un groupe localement compact et q l'application quotient de G dans G/H. Soit σ une représentation de H. On note $\pi = ind_H^G(\sigma)$ la représentation induite par (σ, H_σ) de H à G. L'espace de Hilbert associé à $ind_H^G(\sigma)$ est $\mathscr{F}$ i.e. le complété hilbertien de $\mathscr{F}^0$, l'espace des fonctions continues sur G à valeurs dans H_σ vérifiant les conditions 2. avant la proposition 8. Si $\phi \in C_0(G/H)$ et $f \in \mathscr{F}_0$, alors $(\phi \circ q)f \in \mathscr{F}^0$ et $||(\phi \circ q)f||_{\mathscr{F}} \leq ||\phi||_{\sup}||f||_{\mathscr{F}}$. Ainsi, en posant :

$$M(\phi)f = (\phi \circ q)f$$

M est une $*-$représentation de $C_0(G/H)$ sur $\mathscr{F}$ non dégénérée ($\phi = 1$), et on a :

$$\begin{aligned} \pi(x)M(\phi)\pi(x)^{-1}f(y) &= M(\phi)\pi(x)^{-1}f(x^{-1}y) && (1)\\ &= \phi(q(x^{-1}y))f(y) && (2)\\ &= M(L_x\phi)f(y). && (3) \end{aligned}$$

Dans (1) on a appliqué $\pi(x)$ à la fonction de $\mathscr{F}$: $M(\phi)\pi(x)^{-1}f(.y)$. (On rappelle que $\pi(x)f(y) = f(x^{-1}y)$). La suite est claire.

Par conséquent, $(ind_H^G(\sigma), G/H, M)$ est un système d'imprimitivité, appelé le système d'imprimitivité canonique associé à $ind_H^G(\sigma)$. ■

Définition 18.

1. *Soient* $\Sigma = (\pi, S, P) = (\pi, S, M)$ *et* $\Sigma' = (\pi', S', P') = (\pi', S', M')$ *deux systèmes d'imprimitivité. On dit que* Σ *et* Σ' *sont (unitairement) équivalents s'il existe un opérateur (unitaire)* $U : H_\pi \to H_{\pi'}$ *tel que* $U\pi(x) = \pi'(x)U,\ \forall x \in G$ *et* $UM(\phi) = M'(\phi)U,\ \forall \phi \in C_0(S)$
2. *Si* $\Sigma = (\pi, S, M) = (\pi, S, P)$ *est un système d'imprimitivité, un sous-espace fermé* $\mathscr{M}$ *de* H_π *est dit* $\Sigma-$*invariant si il est invariant sous l'action des opérateur* $\pi(x)$ *et* $M(\phi)$ *(ou les* $\pi(x)$ *et* $P(E)$*).*
3. *Si* $\{\pi_i, S, M_i\}_i$ *est une famille de système d'imprimitivité, leur somme directe est le système d'imprimitivité* (π, S, M) *où* $\pi(x) = \bigoplus \pi_i(x)$ *et* $M(\phi) = \bigoplus M_i(\phi)$

D'un système d'imprimitivité sur G découle une représentation sur une algèbre $L(S\times G)$ que nous décrivons maintenant : Soit S un $G-$espace. En tant qu'espace vectoriel, $L(S \times G)$ est $C_c(S \times G)$. Le produit de deux éléments de cette algèbre est de type convolution :

$$f * g(s, x) = \int_G f(s, y)g(y^{-1}s, y^{-1}x)dy$$

On a une involution :

$$f^*(s, x) = \overline{f(x^{-1}s, x^{-1})}\Delta(x^{-1})$$

où Δ est la fonction modulaire de G.

Soit $\Sigma = (\pi, S, M)$ est un système d'imprimitivité sur G. Si $f \in L(S \times G)$, $M[f(., x)]$ est un opérateur de H_π borné ($||M[f(., x)]|| \leq ||f||_{sup}|P(S_f)|$ où S_f est la projection de supp$(f) \subset G \times S$ sur S) dont le support est compact comme fonction de x et continu pour la topologie normique. Si $v \in H_\pi$, alors $M[f(., x)]\pi(x)v$ est une fonction continue de support compact à valeurs dans H_π, que l'on peut intégrer :

$$T_\Sigma(f)v = \int_G M[f(., x)]\pi(x)vdx \in H_\pi$$

Si la projection de supp(f) sur G est contenu dans un compact K, on a :

$$||T_\Sigma(f)v|| \leq |K| \sup_{x\in G} ||M[f(., x)]||\ ||v|| \leq |K|\ ||f||_{sup}||v||$$

Ainsi, T_Σ est une application linéaire continue de $L(S \times G)$ dans $\mathscr{L}(H_\pi)$.

Regardons ceci sous l'angle de la PVM P associée à M. On a $M[f(., x)] = \int f(s, x)dP(s)$, et donc :

$$T_\Sigma(f) = \int_G M[f(., x)]\pi(x)dx = \int_G \int_S f(s, x)dP(s)\pi(x)dx$$

Mais on a aussi :

$$M[f(., x)] = \int f(xs, s)dP(xs) = \pi(x) \int f(xs, s)dP(s)\pi(x)^{-1}$$

d'où :

$$T_\Sigma(f)v = \int_G \pi(x) \int_S f(xs, s)dP(s)dx$$

Théorème 19. T_Σ *est une* $*-$*représentation non dégénérée de* $L(S \times G)$

Preuve. Admis. cf. Folland p.170 ■

Définition 20. *Une pseudomesure* μ *sur un espace localement compact séparé* X *est une forme linéaire sur* $C_c(X)$ *continue, au sens où : pour tout compact* $K \subset X$ μ *est continue sur* $C_K(X)$.

Poursuivons l'étude des systèmes d'imprimitivité.

Définition 21. *Si* S *est un* $G-$*espace, une pseudomesure* μ *sur* $S \times G$ *est dite de type positif si* $\mu(f^* * f) \geq 0$ *pour toute* $f \in L(S \times G)$ *(i.e. c'est une fonctionnelle positive sur* $L(S \times G)$*).*

Exemple 22. *Soit* Σ *un système d'imprimitivité et* T_Σ *la représentation de* $L(S \times G)$ *associée. Alors pour tout* $v \in H_\pi$*, la pseudomesure* μ *définie par :* $\mu(f) =< T_\Sigma(f)v, v >$ *est de type positif puisque :*

$$< T_\Sigma(f^* * f)v, v >=< T_\Sigma(f^*)T_\Sigma(f)v, v >= ||T_\Sigma(f)v||^2 \geq 0.$$

Réciproquement de toute pseudomesure de type positif sur $S \times G$ *se déduit un système d'imprimitivité. Premièrement, la forme sesquilinéaire :* $< f, g >_\mu= \mu(g^* * f)$ *est positive. En quotientant par son noyau et en complétant l'espace ainsi obtenu, on obtient un espace de Hilbert* H_μ*. Ensuite, pour* $x \in G$ *on définit l'opérateur* $\pi(x)$ *sur* $L(S \times G)$ *par :*

$$\pi(x)f(s, y) = f(x^{-1}s, x^{-1}y).$$

On a :

$$\begin{aligned}
[\pi(x)f]^* * [\pi(x)f](s,y) &= \int_G [\pi(x)f]^*(s,z) * [\pi(x)f](z^{-1}s, z^{-1}y)dz \\
&= \int_G \overline{\pi(x)f(z^{-1}s, z^{-1})}\Delta(z^{-1})[\pi(x)f](z^{-1}s, z^{-1}y)dz \\
&= \int_G \overline{f(x^{-1}z^{-1}s, x^{-1}z^{-1})}\Delta(z^{-1})f(x^{-1}z^{-1}s, x^{-1}z^{-1}y)dz \\
&= \int_G \overline{f(x^{-1}zs, x^{-1}z)}f(x^{-1}zs, x^{-1}zy)dz \\
&= \int_G \overline{f(zs,z)}f(zs,zy)dz \\
&= \int_G f^*(s,z^{-1})\Delta(z^{-1})f(zs,zy)dz \\
&= \int_G f^*(s,z^{-1})\Delta(z)^{-1}f(zs,zy)dz \\
&= \int_G f^*(s,z)\Delta(z)\Delta(z^{-1})f(zs,zy)dz \\
&= f^* * f(s,y).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\pi(x)$ induit une isométrie π_μ sur H_μ. La continuité de $x \mapsto \pi(x)f$ de G dans $L(S \times G)$ implique la continuité forte de $\pi_\mu(x)$. On a donc une représentation unitaire $x \mapsto \pi_\mu$ de G sur H_μ.

A présent, si $\phi \in C_0(S)$, on définit un opérateur $M(\phi)$ sur $L(S \times G)$ par :

$$M(\phi)f(s,y) = \phi(s)f(s,y).$$

Proposition 23. *Pour $\phi \in C_0(S)$, l'opérateur $M(\phi)$ sur $L(S \times G)$ induit un opérateur borné $M_\mu(\phi)$ sur H_μ vérifiant la condition 3.' de la définition d'un système d'imprimitivité. M_μ est une $*-$représentation non dégénérée de $C_0(S)$ sur H_μ.*

Preuve. Admis. df. Folland p.172 ■

Remarque 24. *On a donc construit à partir de μ un système d'imprimitivité, appelé système d'imprimitivité dérivé de μ.*

Définition 25. *Un système d'imprimitivité $\Sigma = (\pi, S, M)$ sera dit cyclique si, s'il existe un vecteur $v \in H_\pi$ tel que $\{T_\Sigma(f)v : f \in L(S \times G)\}$ est dense dans H_π.*

Théorème 26. *Soit $\Sigma = (\pi, S, M)$ un système d'imprmitivité cyclique, de vecteur cyclique v. Soit T_Σ la représentation de $L(S \times G)$ associée et soit μ la pseudomesure de type positif définie sur $S \times G$ par $\mu(f) =< T_\Sigma(f), v, v >$. Soit $\Sigma_\mu = (\pi_\mu, S, M_\mu)$ la système d'imprimitivité dérivé de μ. Alors Σ et Σ_μ sont équivalents.*

Preuve. Si $f \in L(S \times G)$, on a :

$$||f||_\mu^2 = \mu(f^* * f) =< T_\Sigma(f^* * f)v, v >= ||T_\Sigma(f)v||^2,$$

donc l'application $f \mapsto T_\Sigma(f)v$ induit une isométrie U de H_μ sur H_π. Puisque v est un vecteur cyclique, l'image de U est dense dans H_π, alors U est en fait unitaire. On a :

$$T_\Sigma(\pi_\mu(x)f) = \int_G \pi(y) \int_S f(x^{-1}ys, x^{-1}y)dP(s)dy = \pi(x)T_\Sigma(f),$$

par conséquent U entrelace π_μ et π. De plus, si $\phi \in C_0(S)$,

$$T_\Sigma[M_\mu(\phi)f] = \int_G M[\phi f(.,x)]\pi(x)dx = \int_G M(\phi)M[f(.,x)]\pi(x)dx = M(\phi)T_\Sigma(f),$$

et donc $UM_\mu(\phi) = M(\phi)U, \ \forall \phi \in C_0(S)$. ■

Proposition 27. *Tout système d'imprimitivité est somme directe de systèmes d'imprimitivité cycliques.*

Preuve. Admis. cf. Folland p.174 ■

Nous allons donner encore quelques définitions et résultats qui nous permettrons de démontrer le théorème central de cette partie : le théorème d'imprimitivité.

Définition 28. *Soit Σ, un système d'imprimitivité. Le commutant de Σ est l'ensemble $C(\Sigma)$ des opérateurs $T \in \mathscr{L}(H_\pi)$ qui commutent avec les opérateurs $\pi(x)$ et $M(\phi)$ (ou, de façon équivalente, qui commutent avec les $\pi(x)$ et $P(E)$).*

Soit que H est un sous-groupe fermé de G, σ une représentation unitaire de H. Soit $\Pi = ind_H^G(\sigma)$ la représentation induite décrite dans la partie 1., et soit $\Sigma = (\Pi, G/H, M)$ le système d'imprimitivité canonique associé à Π (Π agit sur l'espace $\mathscr{F}$ qui est le complété de $\mathscr{F}_0$, un espace de fonctions sur G à valeurs dans H_σ). Si $T \in C(\sigma) \subset \mathscr{L}(\mathscr{H}_\sigma)$, on définit un opérateur $\widetilde{T}$ sur $\mathscr{F}_0$ par :

$$[\widetilde{T}f](x) = T[f(x)].$$

$\widetilde{T}$ applique $\mathscr{F}_0$ dans lui même puisque T commute avec toutes les $\sigma(\xi^{-1})$ et $\widetilde{T}$ s'étend en un opérateur borné sur $\mathscr{F}$ tel que $||\widetilde{T}|| \leq ||T||$ puisque $||\widetilde{T}f(x)||_\sigma \leq ||T||\ ||f(x)||_\sigma,\ \forall x \in G$. De plus, $\widetilde{T}$ commute avec les translations à gauche et la multiplication par des éléments de $C_0(G/H)$. Ainsi, $\widetilde{T} \in C(\Sigma)$. On a la théorème suivant :

Théoréme 29. *L'application $T \mapsto \widetilde{T}$ est un $*-$isomorphisme isométrique de $C(\sigma)$ dans $C(\Sigma)$.*

Preuve. On a facilement $(ST)^\sim = S^\sim T^\sim$ et $(T^*)^\sim = (\widetilde{T})^*$. On a déjà vu que $||\widetilde{T}|| \leq ||T||$. Montrons l'inégalité inverse.

Soit $\epsilon > 0$ fixé. On se donne $v \in H_\sigma$ tel que $||Tv||_\sigma \geq (1-\epsilon)||T||$. Mais $\{f(1) : f \in \mathscr{F}_0\}$ est dense dans H_σ, il existe donc $f \in \mathscr{F}_0$ tel que $||f(1)||_\sigma < 1$ et $||f(1)-v||_\sigma < \epsilon$. Soit U, un voisinage ouvert de 1 dans G tel que $||f(x)||_\sigma < 1$ et $||f(x) - f(1)||_\sigma < \epsilon$ pour $x \in U$. On se donne $\psi \in C_c(G/H), \psi \neq 0$ telle que $\mathrm{supp}(\psi) \subset q(U)$ et soit $g(x) = \psi(q(x))f(x)$. Si x est tel que $g(x) \neq 0$ (i.e. $q(x) \in \mathrm{supp}(\psi)$) alors, il existe $y \in U$ et $\xi \in H$ tel que $x = y\xi$. On a $||f(y) - v||_\sigma < 2\epsilon$ (inégalité triangulaire...), donc :

$$||Tf(y)||_\sigma \geq ||Tv||_\sigma - ||T||\ ||f(y) - v||_\sigma > (1-3\epsilon)||T|| > (1-3\epsilon)||T||\ ||f(y)||_\sigma.$$

Ainsi, on a : $||Tg(y)||_\sigma > (1-3\epsilon)||T||\ ||g(y)||_\sigma$ ($\psi : G/H \to \mathbb{C}$). Mais alors, on obtient, puisque $Tg \in \mathscr{F}_0$:

$$||Tg(x)||_\sigma = \sqrt{\frac{\Delta_H(\xi)}{\Delta_G(\xi)}}||Tg(y)||_\sigma > \sqrt{\frac{\Delta_H(\xi)}{\Delta_G(\xi)}}(1-3\epsilon)||T||\ ||g(y)||_\sigma = (1-3\epsilon)||T||\ ||g(x)||_\sigma.$$

On en déduit que : $||Tg(x)||_\sigma \geq (1-3\epsilon)||T||\ ||g(x)||_\sigma$ pour tout $x \in G$, et donc $||\widetilde{T}g||_{\mathscr{F}} > (1-3\epsilon)||T||\ ||g||_{\mathscr{F}}$, d'où le résultat puisque ϵ est arbitraire.

On admet la démonstration du fait que tout élément de $C(\Sigma)$ est de la forme $\widetilde{T}$. Il faut pour cela utiliser le fait que les éléments de $\mathscr{F}$ peuvent être réalisées comme des fonctions mesurables telles que l'intégrale $\int \phi(x)f(x)dx$ est bien définie $\forall \phi \in C_c(G)$. (cf. Folland p.176). ■

On démontre maintenant le théorème d'imprimitivité :

Théoréme 30. *Soit G un groupe localement compact et H un sous-groupe fermé de G. On pose $S = G/H$. Soit $\Sigma = (\pi, S, M)$ un système d'imprimitivité transitif sur G. Alors, il existe une représentation unitaire σ de H telle que Σ soit équivalent au système d'imprimitivité associé à $ind_H^G(\sigma)$ (en particulier π est équivalente à $ind_H^G(\sigma)$). De plus, σ est déterminé à équivalence près par Σ.*

Preuve.

On commence par la preuve de l'unicité : Soit donc σ_1 et σ_2 des représentations de H, et soient $\Pi_j = ind_H^G(\sigma_j)$, $\Sigma_j = (\Pi_j, S, M_j)$ les systèmes d'imprimitivités canoniques sur les espaces de Hilbert $\mathscr{F}_j$. On suppose donc qu'il existe un opérateur unitaire $U : \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ inversible entrelaçant Σ_1 et Σ_2. On considère alors la somme directe : $\Sigma = (\Pi_1 \bigoplus \Pi_2, S, M_1 \bigoplus M_2)$, le système d'imprimitivité induit de $\sigma_1 \oplus \sigma_2$. On définit alors un opérateur V sur $\mathscr{F}_1 \bigoplus \mathscr{F}_2$ par $V(f_1, f_2) = (0, Uf_1)$. On a alors : $V^* = (U^* f_2, 0)$. Puisque U est unitaire, VV^* est la projection orthogonale sur $\mathscr{F}_2$ et V^*V est la projection orthogonale sur $\mathscr{F}_1$. On vérifie, en outre, que $V \in C(\Sigma)$ (puisque Σ_1 et Σ_2 sont "$U-$équivalents"). Alors par le théorème précédent, on en déduit qu'il existe $T \in C(\sigma_1 \oplus \sigma_2)$ tel que $V = \widetilde{T}$. Puisque $T \mapsto \widetilde{T}$ est un $*-$isomorphisme, TT^* et T^*T sont les projections orthogonales sur H_{σ_2} et H_{σ_1} respectivement. En particulier, $T_0 = T|H_{\sigma_1}$ est un isomorphisme unitaire de H_{σ_1} sur H_{σ_2} et puisque $T \in C(\sigma_1 \oplus \sigma_2)$ ($\widetilde{T} \in C(\Sigma)$) on en déduit que T_0 entrelace σ_1 et σ_2, d'où le résultat d'unicité.

Pour l'existence notons deux choses. Tout système d'imprimitivité est somme directe de système d'imprimitivité cycliques induire une représentation commute avec la somme directe. On peut donc supposer que Σ est cyclique. Par ailleurs, on a vu qu'un système d'imprimitivité cyclique est équivalent à un système d'imprimitivité dérivé d'une pseudomesure μ sur $S \times G$.

On montre maintenant l'existence d'un tel opérateur U, et d'une telle représentation σ. Cette preuve tient en deux étapes :

1. On définit une forme hermitienne positive $<,>_\lambda$ sur $C_c(G)$. En quotientant par son noyau, puis en complétant par rapport au produit scalaire ainsi obtenu, on obtiendra un espace de Hilbert H_λ. On va également définir une action de H sur $C_c(G)$ que l'on va réaliser comme une représentation unitaire σ de H sur H_λ.
2. L'espace de Hilbert pour $ind_H^G(\sigma)$ sera constitué de fonctions continues sur G à valeurs dans H_λ, et donc au final constitué de fonctions continues sur G à valeurs dans $C_c(G)$. D'autre part, l'espace de Hilbert pour le système d'imprimitivité dérivé de μ est construit à partir de $L(S \times G)$. On construira alors l'opérateur un opérateur d'équivalence entre ces deux espaces à partir d'une application linéaire $U : L(S \times G) \to C(G, C_c(G))$

Soit μ une pseudomesure de type positif sur $S \times G$, $S = G/H$. si $F \in C_c(G \times G)$, on définit $\widetilde{F} \in L(S \times G)$ par :

$$\widetilde{F}(q(y), x) = \int_H f(x^{-1}y\xi, y\xi)\Delta_G(y\xi)^{-1}d\xi.$$

L'application $F \mapsto \widetilde{F}$ est continue de $C_c(G \times G)$ dans $L(S \times G) = C_c(S \times G)$. Ainsi, on peut définir une pseudomesure λ sur $G \times G$ par :

$$\lambda(F) = \mu(\widetilde{F}).$$

On définit alors une forme sesquilinéaire sur $C_c(G)$:

$$\begin{aligned} < f, g >_\lambda = \lambda(f \otimes \overline{g}) &= \int_{G\times G} f(x)\overline{g(y)}d\lambda(x, y) \\ &= \int_{S\times G}\int_H f(x^{-1}y\xi)\overline{g(y\xi)}\Delta_G(y\xi)^{-1}d\xi d\mu(q(y), x). \end{aligned}$$

On définit maintenant $U : L(S \times G) \to C(G, C_c(G))$, par :

$$[Uf(x)](y) = f(q(x), xy^{-1}).$$

Uf est continue de G dans $C_c(G)$.

Lemme 31. *Soit $f \in L(S \times G)$ et ϕ une fonction positive de $C_c(G)$. On définit $\phi' \in C_c(S)$ par $\phi'(q(x)) = \int_H \phi(x\xi)d\xi$, et $g \in L(S \times G)$ par $g(s, x)\phi'(s)^{1/2}f(s, x)$. Alors :*

$$\int_G \phi(x) < Uf(x), Uf(x) >_\lambda dx = \mu(g^* * g).$$

Preuve. Admis. Voir Folland p.180. ■

Corollaire 32. *La forme $<,>_\lambda$ est positive sur $C_c(G)$*

Preuve. Il suffit de se servir du fait que μ est de type positif et du lemme précédent. ■

On obtient donc un espace de Hilbert H_λ comme annoncé (en quotientant...). On définit maintenant pour tout $\xi \in H$, une application $\sigma(\xi) : C_c(G) \to C_c(G)$ par :

$$[\sigma(\xi)f](x) = \sqrt{\frac{\Delta_H(\xi)}{\Delta_G(\xi)}}f(x\xi).$$

On a :

$$\begin{aligned} < \sigma(\xi)f, \sigma(\xi)g >_\lambda &= \int\int \frac{\Delta_H(\xi)}{\Delta_G(\xi)} f(x^{-1}y\eta\xi)\overline{g(y\eta\xi)}\Delta_G(y\eta)^{-1}d\eta d\mu(q(y), x) \\ &= \int\int f(x^{-1}y\eta\xi)\overline{g(y\eta\xi)}\Delta_G(y\eta)^{-1}d\eta d\mu(q(y), x) \\ &= < f, g >_\lambda \end{aligned}$$

Ainsi, $\sigma(\xi)$ est une isométrie. De plus, $\sigma(\xi\eta) = \sigma(\xi)\sigma(\eta)$, $\sigma(x^{-1}) = \sigma(x)^{-1}$ et $x \mapsto \sigma(x)f$ est continue de G dans $C_c(G)$, $\forall f \in C_c(G)$. Ainsi l'opérateur $\sigma(\xi)$ donne une représentation unitaire de H sur H_λ, notée encore σ.

On termine la démonstration du théorème d'imprimitivité. On note que si $f \in L(S \times G)$,

$$[Uf(x\xi)](y) = f(q(x\xi), x\xi y^{-1}) = f(q(x), x(y\xi^{-1})^{-1}) = [Uf(x)](y\xi^{-1}) = \sqrt{\frac{\Delta_H(\xi)}{\Delta_G(\xi)}}[\sigma(\xi^{-1})Uf(x)](y).$$

Ainsi, si l'on voit $Uf(x)$ comme un élément de H_λ(qui contient $C_c(G)$), on obtient que Uf est un élément de $\mathscr{F}$, l'espace de Hilbert pour $\Pi = ind_H^G(\sigma)$. De plus, si $f \in L(S \times G)$, on se donne un compact $v \in S$ tel que supp$f \subset V \times G$, et $\phi \geq 0$ dans $C_c(G)$ tel que $\int_H \phi(x\xi)d\xi = 1$, pour $x \in q^{-1}(V)$ (lemme 2). Alors, supp$(f) \subset q^{-1}(V)$ et $g = f$ avec les notation du lemme précédent. Alors :

$$||Uf||^2_{\mathscr{F}} = \int \phi(x) < Uf(x), Uf(x) >_\lambda dx = \mu(f^* * f),$$

donc U définit une isométrie de H_μ (sur lequel le système d'imprimitivité dérivé de μ agit $\supset L(S \times G)$) dans $\mathscr{F}$. U vérifie :

$$[U[\pi_\mu(x)f](y)](z) = [\pi_\mu(x)f](q(y), yz^{-1}) = f(q(x^{-1}y), x^{-1}yz^{-1}) = [Uf(x^{-1}y)](z) = [[\Pi(x)Uf](y)](z).$$

De même si M, la représentation de $C_0(S)$ du système d'imprimitivité canonique associé à Π, entrelace les deux systèmes d'imprimitivité.

Il ne reste qu'à vérifier que U applique H_μ sur $\mathscr{F}$, il suffit de vérifier que l'image est dense.(cf. Folland p.182). ∎

2.B Représentations de certains groupes localement compacts

Soit G un groupe localement compacts et N un sous groupe fermé abélien normal de G (non trivial). G agit sur N par conjugaison et ceci induit une action sur $\widehat{N}$, $(x, \nu) \mapsto x\nu$ définie comme suit :

$$< n, x\nu > = < x^{-1}nx, \nu >, \quad (x \in G,\ \nu \in \widehat{N},\ n \in N).$$

Pour tout $\nu \in \widehat{N}$, on définit $G_\nu = \{x \in G : x\nu = \nu\}$ le stabilisateur de ν et $O_\nu = \{x\nu : x \in G\}$ l'orbite de ν. L'action de G sur $\widehat{N}$ n'est jamais triviale (on a $O_1 = \{1\}$ car $\forall x \in G,\ n \in N, < n, x1 > = < x^{-1}nx, 1 > = 1$ donc $x1 = x$). On introduit donc la :

Définition 33. *On dit que G agit régulièrement sur $\widehat{N}$ si*

R1. Les orbites sont dénombrablement séparées i.e. il existe une famille dénombrable $\{E_j\}$ de boréliens $G-$invariants de $\widehat{N}$ telle que chaque orbite de $\widehat{N}$ est l'intersection des E_j qui la contiennent.

R2. Pour tout $\nu \in \widehat{N}$, l'application : $G/G_\nu \to O_\nu$, $\ xG_\nu \mapsto x\nu$ est un homéomorphisme.

On se donne une représentation unitaire π de G. Le théorème suivant est important :

Théoréme 34. *Soit π une représentation unitaire d'un groupe abélien localement compact N. Alors il existe une unique $H_\pi-PVM$ P sur $\widehat{N}$ telle que :*

$$\pi(n) = \int < n, \nu > dP(\nu), \quad (n \in N).$$

De plus, un opérateur $T \in L(H_\pi)$ est dans $C(\pi)$ si et seulement si T commute avec tous les $P(E)$, pour tout borélien $E \in \widehat{G}$.

Preuve. Admis. cf. Folland p.105 ∎

Proposition 35. *Soit $(\pi, \widehat{N}, P)$ un système d'imprimitivité. Si π est irréductible alors pour tout borélien $G-$invariant $E \subset \widehat{N}$, on a $P(E) = 0$ ou $P(E) = I$.*

Preuve. Soit $x \in G$. $E \mapsto \pi(x)P(E)\pi(x)^{-1}$ est la PVM associée à la représentation de N, $n \mapsto \pi(x)\pi(n)\pi(x^{-1})$ et $E \mapsto P(xE)$ est la PVM associée à la représentation $n \mapsto \pi(xnx^{-1})$ par définition de l'action de G sur $\widehat{N}$. Ces représentation sont égales donc les mesures également par l'unicité du théorème précédent. Donc la première assertion en découle.

Si de plus, π est irréductible et E est $G-$invariant, alors on obtient $\pi(x)P(E)\pi(x^{-1}) = P(E), \forall x \in G$, donc $P(E) \in C(\pi)$. Par le lemme de Schur, on en déduit que $P(E) = 0$ ou $P(E) = I$. ∎

Proposition 36. *Si π est irréductible et G agit régulièrement sur $\widehat{N}$, alors il existe une orbite $\mathscr{O} \subset \widehat{N}$ telle que $P(\mathscr{O}) = I$*

Preuve. Soit $\{E_j\}$ une famille comme dans la condition $R1$. Si $\mathscr{O}$ est une orbite alors on a $\mathscr{O} = \bigcap_{j \in J} E_j$ pour un certain $J \subset \mathbb{N}$, et $P(\mathscr{O})$ est la projection sur l'intersection des images $P(E_j)$, $j \in J$. Ces images valent toutes 0 ou I. Supposons par l'absurde qu'une des $P(E_j) = 0$. Alors, $P(\mathscr{O}) = 0$ par définition de $\mathscr{O}$ (intersection des E_j). Mais on a donc que $P(\mathscr{O}) = 0$ pour toutes les orbites, et donc $\mathscr{O}$ il existe $j(\mathscr{O})$ tel que $\mathscr{O} \subset E_{j(\mathscr{O})}$ et $P(E_{j(\mathscr{O})}) = 0$. Mais alors, $\widehat{N} = \bigcup_{\mathscr{O}} E_{j(\mathscr{O})}$ et donc $P(\widehat{N}) = 0$, ce qui est absurde. Ainsi, $P(E_j) = I$, $\forall j$, et donc $P(\mathscr{O}) = I$. ∎

Remarque 37. *Faisons une remarque sous les hypothèses de la proposition précédente. L'orbite $\mathscr{O}$ telle que $P(\mathscr{O}) = I$ est unique puisque $P(N - \mathscr{O}) = 0$. Fixons un élément $\nu \in \mathscr{O}$. La condition R2 implique que $\mathscr{O}$ peut être identifiée à G/G_ν. La PVM P peut donc être vue comme étant un élément agissant sur G/G_ν plutôt que sur $\widehat{N}$, et $(\pi, G/G_\nu, P)$ est un système d'imprimitivité transitif. Ainsi, par le théorème d'imprimitivité, on en déduit qu'il existe une représentation unitaire σ de G_ν telle que $(\pi, G/G_\nu, P)$ est unitairement équivalente au système d'imprimitivité canonique associé à $ind_{G_\nu}^G(\sigma)$.*

Proposition 38. $\sigma(n) =< n, \nu > I, \quad \forall n \in N$

Preuve. On suppose que $(\Pi, G/G_\nu, P)$ est égal (pas seulement équivalent) au système d'imprimitivité canonique associé à $ind_{G_\nu}^G(\sigma)$, agissant sur l'espace de Hilbert $\mathscr{F}$ usuel. Ainsi, la formule

$$\Pi(n) = \int < n, \nu > dP$$

devient

$$\Pi(n) = \int < x, x\nu > dP(q(x)).$$

Alors, par définition du système d'imprimitivité canonique, on a pour $\phi \in C_0(G/G_\nu)$ et $f \in \mathscr{F}^0$:

$$(\int \phi dP)f = M(\phi)f = (\phi \circ q)f.$$

Cette dernière formule est encore valable pour les fonctions continues bornées de G/G_ν et en particulier pour $\phi(q(x)) =< n, x\nu >$. Alors, pour $f \in \mathscr{F}^0$ (on applique la définition de $(\int \phi dP)f(.) = [\pi(n)f](.)$),

$$[\Pi(n)f](x) =< n, x\nu > f(x) =< x^{-1}nx, \nu > f(x)$$

D'autre part, puisque N est normal dans G et G_ν, G/N et G/G_ν possèdent des mesures $G-$invariantes, i.e. les mesures de Haar associées. Ainsi par le théorème 4, $\Delta_G|N = \Delta_{G_\nu}|N = \Delta_N = 1$ (car N est abélien). Alors, on a :

$$[\Pi(n)f](x) = f(n^{-1}x) = f(x(x^{-1}n^{-1}x)) = \sigma(x^{-1}nx)f(x).$$

D'où, en comparant les expressions obtenues, on trouve :

$$\sigma(x^{-1}nx)f(x) =< x^{-1}nx, \nu > f(x)$$

En particulier, $\sigma(n)f(1) =< n, \nu > f(1)$. Mais, $\{f(1) : f \in \mathscr{F}^0\}$ est dense dans H_σ (cf. Folland p158), d'où le résultat. ∎

On peut résumer ce qu'on a obtenu ci-dessus, ainsi :

Théorème 39. *Supposons que G agit régulièrement sur $\widehat{N}$. Si π est une représentation unitaire irréductible de G, il existe un $\nu \in \widehat{N}$ et une représentation σ de G_ν avec $\sigma(n) =< n, \nu > I$, $\forall n \in N$ telle que π est unitairement équivalente à $ind_{G_\nu}^G(\sigma)$*

Remarque 40. *L'orbite $\mathscr{O}_\nu$ est déterminé par π mais le choix de ν est arbitraire. Si ν' est un autre élément de cette orbite, $\nu' = x\nu$, les groupes G_ν et $G_{\nu'}$ sont isomorphes, et même $G_{\nu'} = xG_\nu x^{-1}$. De plus la correspondance $\sigma \leftrightarrow \sigma'$ où $\sigma'(y) = \sigma(x^{-1}yx)$ est un bijection entre les représentations de G_ν et celles de $G_{\nu'}$. Enfin, l'application $Uf(y) = f(x^{-1}yx)$ définit un opérateur unitaire entre $ind_{G_\nu}^G(\sigma)$ et $ind_{G_{\nu'}}^G(\sigma')$. L'unicité de ν n'est donc pas essentielle.*

On a la réciproque du théorème précédent :

Théorème 41. *Supposons que G agit régulièrement sur $\widehat{N}$. Si $\nu \in \widehat{N}$ et σ est une représentation irréductible de G_ν telle que $\sigma(n) =< n, \nu > I$, $\forall n \in N$ alors $\pi = ind_{G_\nu}^G(\sigma)$ est irréductible. Si σ' est une autre représentation de G_ν telle que $ind_{G_\nu}^G(\sigma)$ et $ind_{G_\nu}^G(\sigma')$ sont unitairement équivalentes alors, σ et σ' sont unitairement équivalentes.*

Preuve. Soit $\Sigma = (\pi, G/G_\nu, P)$ le système dimprimitivité canonique associé à π. On identifie G/G_ν à O_ν et l'on considère P comme une PVM sur $\widehat{N}$ en posant $P(E) = P(E \cap O_\nu)$. On a $\forall n \in N$:

$$\pi(n)f(x) = f(n^{-1}x) = f(xx^{-1}n^{-1}x) = \sigma(x^{-1}nx)f(x) =< x^{-1}nx, \nu > f(x) =< n, x\nu > f(x),$$

d'où l'on obtient comme dans la proposition 38., que $\pi(n) = \int_{\widehat{N}} < n, . > dP$. Ainsi, P est la PVM associé à $\pi|N$ (théorème 34.) . Alors (lemme de shcur et thm 29.) si $T \in C(\pi)$, T, commute avec les $P(E)$ (thm 34.), et donc $T \in C(\Sigma)$. Ainsi, on en déduit que $C(\Sigma) \simeq C(\sigma) = \mathbb{C}I$. Donc $C(\pi) = \mathbb{C}I$ et π est irréductible. ∎

Remarque 42. *Ce qui précède n'est pas totalement satisfaisant. Par exemple, si $G_\nu = G$ alors les résultats précédents n'ont un intérêt que dans la propriété : $\pi|N = \nu I$.*

Proposition 43. *Supposons que l'on peut étendre $\nu \in \widehat{N}$ en une représentation de G_ν, i.e. qu'il existe un homomorphisme continu $\widetilde{\nu} : G_\nu \to \mathscr{T}$ ($\mathscr{T}$ est le groupes des nombres complexes de module 1) tel que $\widetilde{\nu}|N = \nu$. Si ρ est une représentation irréductible de G_ν/N, la formule $\sigma(y) = \widetilde{\nu}(y)\rho(yN)$ définit une représentation irréductible de G_ν sur H_ρ telle que $\sigma(n) =< n, \nu > I$, $\forall n \in N$. De plus, toute représentation de G_ν s'obtient de cette manière.*

Preuve. Admis. (simple) cf. Folland p.186 ■

Le cas le plus important d'application de la proposition précédente se produit lorsque G est le produit semi-direct de N avec un autre sous-groupe H : $G = N \ltimes H$, (muni de l'opération :

$$(nh)(n'h') = (n[hn'h^{-1}])(hh')$$

et tel que l'application $(n, h) \mapsto nh$ un est homéomorphisme de $N \times H$ vers G).

Dans notre cas, où N est abélien, on définit pour $\nu \in \widehat{N}$ le little-group H_ν :

$$H_\nu = G_\nu \cap H.$$

Alors puisque $N \subset G_\nu$, on a $G_\nu = N \ltimes H_\nu$ et $H_\nu \simeq G_\nu/N$. Alors le caractère ν s'étend toujours en un homéomorphisme $\widetilde{\nu} : G_\nu \to \mathscr{T}$ par la formule $\widetilde{\nu}(nh) = \nu(n) =< n, \nu >$. En effet,

$$\widetilde{\nu}((n_1h_1)(n_2h_2)) =< n_1(h_1n_2h_1^{-1}), \nu >=< n_1, \nu >< h_1n_2h_1^{-1}, \nu >$$

et puisque $h_1 \in H_\nu$, on a : $h_1\nu = \nu$, d'où :

$$\widetilde{\nu}((n_1h_1)(n_2h_2)) =< n_1, \nu >< n_2, \nu >= \widetilde{\nu}(n_1h_1)\widetilde{\nu}(n_2h_2).$$

La proposition précédente peut se traduire ainsi : si $\nu \in \widehat{N}$ et ρ est une représentation irréductible de H_ν, on obtient une représentation de G_ν, notée $\nu\rho$ en posant : $(\nu\rho)(nh) =< n, \nu > \rho(h)$. De plus, toute représentation irréductible σ de G_ν telle que $\sigma(n) =< n, \nu > I$, est de cette forme. Enfin, puisque $(\nu\rho)|H_\nu = \rho$, $\nu\rho$ est équivalente à $\nu'\rho'$ si et seulement si ρ est équivalente à ρ'. On obtient le :

Théorème 44. *Soit $G = N \ltimes H$, où N est un abélien et G agit régulièrement sur $\widehat{N}$. Si $\nu \in \widehat{N}$ et ρ est une représentation irréductible de H_ν, alors $ind_{G_\nu}^G(\nu\rho)$ est une représentation irréductible de G, et toute représentation irréductible de G est équivalente à une représentation de ce type. De plus $ind_{G_\nu}^G(\nu\rho)$ et $ind_{G_{\nu'}}^G(\nu'\rho')$ sont équivalentes si et seulement si ν et ν' sont dans la même orbite, i.e. $\nu' = x\nu$, et $h \mapsto \rho(h)$ et $h \mapsto \rho'(x^{-1}hx)$ sont des représentations équivalentes de H_ν.*

3 Représentations irréductibles unitaires du groupe $ax + b$

Soit G le groupe des transformations affines du type $ax + b$, avec $a > 0, b \in \mathbb{R}$ muni de la loi de groupe :

$$(a, b)(a', b') = (aa', b + ab').$$

On a $G = N \ltimes H$ où $N = \{(1, b) : b \in \mathbb{R}\}$ et $H = \{(a, 0) : a > 0\}$. On identifie N à $\mathbb{R}$ via la correspondance $(1, b) \mapsto b$ et $\widehat{N}$ à $\mathbb{R}$ via la dualité $< b, \beta >= e^{2i\pi\beta b}$. On a :

$$(a, b)^{-1}(1, b')(a, b) = (\frac{1}{a}, \frac{-b}{a})(1, b')(a, b) = (\frac{1}{a}, \frac{-b}{a} + \frac{b'}{a})(a, b) = (1, \frac{-b}{a} + \frac{b'}{a} + \frac{-b}{a}) = (1, \frac{b'}{a}),$$

ainsi l'action de G sur $\widehat{N}$ est donnée par $(a, b)\beta = \frac{\beta}{a}$, il n'y a donc que trois orbites : $]-\infty, 0[$, $]0, +\infty[$ et $\{0\}$, et G agit donc régulièrement sur $\widehat{N}$. Les représentations irréductibles unitaires de G sont donc décrites par le théorème précédent : celles associés à $\{0\}$ sont les caractères de G/N étendus à G ($G_0 = G$) :

$$\pi_\lambda^0(a, b) = a^{i\lambda} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

(déjà vu au paragraphe 1.). Pour l'orbite $]0, +\infty[$, on fixe un point $1 \in]0, +\infty[$. On a $H_1 = \{1\}$, en effet $H_1 = H \cap G_1$, et $G_1 = \{(a, b) : (a, b)1 = 1\} = \{(a, b) : 1/a = 1\} = \{(1, b)\} = N$. Mais $N \cap H = \{1\}$, donc on a bien $H_1 = \{1\}$. Les représentations irréductibles associées à cette orbite sont équivalentes à la représentation π^+ induite par le caractère $< b, 1 >= e^{2i\pi b}$ de N à G ou π^- induite par le caractère $< b, -1 >$. Cette construction a également été étudiée au paragraphe 1.

Références

[1] Gerald B. Folland. *A course in abstract harmonic analysis.* Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.