Les groupes de type Heisenberg (ou type H) [A. Aldo Kaplan]

Typographie : $\mathfrak{h}$ H ——————

$\mathfrak{n}$ n cursive allemande

$\mathfrak{v}$ v —————— } algèbre de Lie

$\mathfrak{z}$ z ——————

ω omega grec $(\neq w)$

ν nu grec $(\neq v, \mathfrak{v})$

Soient $\mathfrak{v}$ et $\mathfrak{z}$ deux espaces de Hilbert réels de dimension finie,

$\dim \mathfrak{v} = 2p$, $\dim \mathfrak{z} = q$. On pose $r = p+q$.

On note $\langle , \rangle$ et $| \ |$

Soit $j : \mathfrak{z} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{v})$ un opérateur tel que ① $|j(Z)V| = |Z||V|$ ② $j(Z)^2 = -|Z|^2 \mathrm{Id}$.

Par polarisation de ①, on a $\left| \begin{array}{l} \langle j(Z)V, j(Z')V \rangle = \langle Z, Z' \rangle |V|^2 \\ \langle j(Z)V, j(Z)V' \rangle = |Z|^2 \langle V, V' \rangle \end{array} \right.$

Substituons $j(Z)V'$ à V' : on a alors $\langle j(Z)V, j(Z)j(Z)V' \rangle = |Z|^2 \langle V, j(Z)V' \rangle$

avec ②, cela donne, en simplifiant par $|Z|^2$, $-\langle j(Z)V, V' \rangle = \langle V, j(Z)V' \rangle$:

$j(Z)$ est antisymétrique pour tout $Z \in \mathfrak{z}$ et la forme bilinéaire

$$\begin{array}{l} \mathfrak{v} \times \mathfrak{v} \longrightarrow \mathfrak{z} \\ (V, V') \longmapsto [V, V'] \end{array} \quad \text{définie par} \quad \langle Z, [V,V'] \rangle = \langle j(Z)V, V' \rangle$$

est antisymétrique.

Posons $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$: on définit une structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{n}$ en étendant la forme ci-dessus à $\mathfrak{n}$ en posant

$$[V + Z, V' + Z'] = [V, V'] \in \mathfrak{z}$$

$\mathfrak{n}$ est un groupe de Lie nilpotent de pas 2, de centre $\mathfrak{z}$ (sauf si $\mathfrak{z} = \{0\}$ et $q = 0$ et $\mathfrak{n}$ est abélien)

[on sait que $\left| \begin{array}{l} 2p = k\, 2^{4\alpha+\beta} \\ 0 \leq q \leq 8\alpha + 2^\beta - 1 \end{array} \right.$ avec k impair et $\alpha\beta \leq 3$]

Si $q = 1$, $\mathfrak{n}$ est l'algèbre de Heisenberg. Les cas $\left| \begin{array}{l} q = 0 \\ 2p \text{ quelconque} \end{array} \right.$ $\left| \begin{array}{l} q = 1 \\ 2p \text{ pair} \end{array} \right.$ $\left| \begin{array}{l} q = 3 \\ 2p = 4k,\ k \text{ impair} \end{array} \right.$ $\left| \begin{array}{l} q = 7 \\ 2p = 8 \end{array} \right.$ et les sous-algèbres d'Iwasawa nilpotentes des algèbres de Lie réelles semi-simples de rang 1

Caractérisation : $\mathfrak{n}$ est de type H si et seulement si $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} + \mathfrak{z}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{z}$ espaces de Hilbert de dimension finie tels que $\mathfrak{z}$ est le centre de $\mathfrak{n}$ et, si $V \in \mathfrak{v}$, $|V|=1$, $\mathrm{ad}(V) : \mathfrak{v} \ominus \ker \mathrm{ad}(V) \longrightarrow \mathfrak{z}$ est une isométrie surjective

$\longrightarrow$ on définit j par $\begin{cases} j : \mathfrak{z} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{v}) \\ ③ \langle j(Z)V, V' \rangle = \langle Z, [V, V'] \rangle \end{cases}$

Soit $V \in \mathfrak{v} \setminus \{0\}$ et $Z \in \mathfrak{z}$. Alors $|V|^{-1} \mathrm{ad}(V)$ est une isométrie surjective et il existe un unique $V_1 \in \mathfrak{v} \ominus \ker \mathrm{ad}(V)$ tel que $\begin{cases} |V|^{-1}[V, V_1] = Z \\ |V_1| = |Z| \end{cases}$

Soit $V' \in \mathfrak{v} \ominus \ker \mathrm{ad}(V)$. On a $\langle V_1, V' \rangle = \langle |V|^{-1}\mathrm{ad}(V)V_1, |V|^{-1}\mathrm{ad}(V)V' \rangle$
$= \langle Z, |V|^{-1}[V, V'] \rangle$
$= |V|^{-1} \langle j(Z)V, V' \rangle$

Donc $V_1 = |V|^{-1} j(Z)V$. Cela prouve $|V_1| = |V|^{-1}|j(Z)V|$

et donc $|j(Z)V| = |V_1||V| = |Z||V|$.

De plus, ③ montre que $j(Z)$ est antisymétrique et donc, comme

$\langle j(Z)V, j(Z)V' \rangle = |Z|^2 \langle V, V' \rangle$,

$\langle -j(Z)^2 V, V' \rangle = |Z|^2 \langle V, V' \rangle$

et donc $j(Z)^2 = -|Z|^2 \,\mathrm{Id}$.

$\longrightarrow$ Réciproquement, soit $V \in S_{\mathfrak{v}}$, $|V|=1$ et $Z \in \mathfrak{z}$ et cherchons $V_0 \in \mathfrak{v} \ominus \ker \mathrm{ad}(V)$ tel que $[V, V_0] = Z$ et $|V_0| = |Z|$. $V_0 = j(Z)V$ fait l'affaire !

Par ③, $[V, V'] = 0 \Rightarrow \langle j(Z)V, V' \rangle = 0$ et donc $j(Z)V \in \mathfrak{v} \ominus \ker \mathrm{ad}(V)$

Par ①, $|j(Z)V| = |Z|$

Soit $Z' \in \mathfrak{z}$: on a $\langle Z', [V, j(Z)V] \rangle = \langle j(Z')V, j(Z)V \rangle$
$= \langle Z', Z \rangle$

et donc $[V, j(Z)V] = Z$.

Définition d'une structure complexe sur $\mathfrak{v}$

Pour chaque $\omega \in S_{\mathfrak{z}}$, $|\omega| = 1$, $j(\omega)$ définit une structure complexe sur $\mathfrak{v}$: $j(\omega)^2 = -\mathrm{Id}$

On note $\{\ ,\ \}_\omega : \mathfrak{v} \times \mathfrak{v} \longrightarrow \mathbb{C}$
$(V, W) \longmapsto \{V, W\}_\omega = \langle V, W \rangle + i \langle j(\omega)V, W \rangle$
$= \langle V, W \rangle + i \langle \omega, [V, W] \rangle$

le produit scalaire sur l'espace de Hilbert complexe, alors noté $\mathfrak{v}_\omega$

Soit Δ le laplacien sur $\mathfrak{v}$: on choisit une b.o.n. V_j de $\mathfrak{v}$ et on pose

$\Delta = \sum V_j^2$

Δ est invariant par translations à gauche

- automorphismes de N dont les différentielles préservent le produit scalaire de $\mathfrak{v}$.

Théorème : on a $\Delta u = f \Leftrightarrow u = f * \Phi$, où $\Phi(v,z) = \underset{\text{constante}}{c}\,(|v|^4 + |z|^2)^{-\frac{p+q-1}{2}}_{\;k}$.

Posons $\Phi_\varepsilon(v,z) = c\left((|v|^2+\varepsilon^2)^2 + |z|^2\right)^{-\frac{p+q-1}{2}}$ $\longrightarrow$ analytique

Posons $\varphi_i(t) = (|v(ne^{tV_i})|^2+\varepsilon^2)^2 + |z(ne^{tV_i})|^2$

$$V_i^2\Phi_\varepsilon(n) = \frac{d^2}{dt^2}\Phi_\varepsilon(ne^{tV_i})\Big|_{t=0} = c\,\frac{d^2}{dt^2}\varphi_i(t)^{-k}$$

$$= ck\,\varphi_i(0)^{-k-2}\left((k+1)\varphi_i'(0)^2 - \varphi_i(0)\varphi_i''(0)\right)$$

u^{-k}

$-k\,u^{-k-1}u'$

$-k\left((-k-1)u^{-k-2}u' + u^{-k-1}u''\right)$

$k\,u^{-k-2}\left((k+1)u' + u u''\right)$

Or on a $e^x e^y = e^{x+y+\frac12[x,y]}$

Donc $n = e^{v(n)+z(n)/4}$ $\Rightarrow$ $ne^{tV_i} = e^{v(n)+z(n)/4}e^{tV_i} = e^{v(n)+\frac{z(n)}{4}+tV_i+\frac12[v(n),tV_i]}$

$ne^{tV_i} = e^{v(ne^{tV_i})+z(ne^{tV_i})/4}$ $= e^{v(ne^{tV_i})+\frac{z(ne^{tV_i})}{4}}$

Par identification, $v(ne^{tV_i}) = v(n)+tV_i$

$\frac{z(ne^{tV_i})}{4} = \frac{z(n)}{4}+\frac{t}{2}[v(n),V_i]$

On a $\varphi_i(t) = (|v(n)+tV_i|^2+\varepsilon^2)^2 + |z(n)+2t[v(n),V_i]|^2$

$\varphi_i'(0) = 4\left((|v(n)|^2+\varepsilon^2)\langle v(n),V_i\rangle + \langle z(n),[v(n),V_i]\rangle\right)$

$\varphi_i''(0) = 4\left(2\langle v(n),V_i\rangle^2 + |V_i|^2(|v(n)|^2+\varepsilon^2) + 2|[v(n),V_i]|^2\right)$

$\varphi_i'(0) = 4\langle (|v(n)|^2+\varepsilon^2)v(n) + j(z(n))v(n), V_i\rangle$

et $\varphi_i'(0) = 4\langle (|v(n)|^2+\varepsilon^2)v(n) + j(z(n))v(n)|^2$

$\sum_i \varphi_i'(0)^2 = 16\left|(|v(n)|^2+\varepsilon^2)v(n)\right| + j(z(n))v(n)|^2$

$\sum_i \varphi_i'(0)^2 = 16\left((|v(n)|^2+\varepsilon^2)^2|v(n)|^2 + |z(n)|^2|v(n)|^2\right)$

$= 16\,|v(n)|^2\,\varphi(0)$

$\varphi_i(0) = \varphi(0) = (|v(n)|^2+\varepsilon^2)^2 + |z(n)|^2$

Si (z_ℓ) est une b.o.n. de $\mathfrak{z}$, $\sum_i |[v(n),V_i]|^2 = \sum_i\sum_\ell \langle z_\ell,[v(n),V_i]\rangle^2$

$= \sum_i\sum_\ell \langle j(z_\ell)v(n),V_i\rangle^2$

$= \sum_\ell |j(z_\ell)v(n)|^2$

$= \sum_\ell |z_\ell|^2|v(n)|^2$

$= q\,|v(n)|^2$

Donc $\sum_i \varphi_i''(0) = 4\left((2+2p+2q)|v(n)|^2 + \varepsilon^2 2p\right)$

et $\Delta\Phi_\varepsilon(n) = -4(2p)ck\,\varepsilon^2\left((|v(n)|^2+\varepsilon^2)^2 + |z(n)|^2\right)^{-k-2}$

Donc $\Delta\Phi$ est nul hors de l'identité au sens des distributions :

Considérons le groupe d'automorphismes de N $\varepsilon \longmapsto \delta_\varepsilon(u) = e^{\varepsilon v(u) + \varepsilon^2 z(u)/4}$

Alors $\delta_\varepsilon(du) = \varepsilon^{2r}\, du$ $\qquad r = p+q$

$\Delta\phi_\varepsilon \circ \delta_\varepsilon = \varepsilon^{-2r} \quad \Delta\phi_1$ car Δ est invariant par automorphismes préservant le produit scalaire de $\mathfrak{n}$

$k+1 > \frac{p+q}{2} \Rightarrow \Delta\phi_\varepsilon$ intégrable pour tout $\varepsilon > 0$

$$\int_{|v(u)|^4 + |z(u)|^2 > \lambda} (\Delta\Phi_\varepsilon)(u)\, du = \int_{|v(u)|^4 + |z(u)|^2 > \frac{\lambda}{\varepsilon^4}} \Delta\Phi_1(u)\, du$$

$\downarrow$ pour chaque λ.

0

Choisissons c de sorte que $\int_N \Delta\Phi_1(u)\, du = 1$.

Alors $\Delta(f * \Phi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \Delta(f * \phi_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} f * \Delta\phi_\varepsilon = f$ pour f C_c^∞

car Δ est invariant à gauche