(1) Le groupe de Heisenberg : c'est le groupe d'unitaires de $L^2(\mathbb{R}^n)$ généré par les

$$\begin{cases} \tau_p u(x) = u(x+p) \\ m_q u(x) = e^{i\langle q,x\rangle} u(x) \end{cases}$$

On a $\tau_p = e^{i\langle p,D\rangle}$ où $D = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = (D_1, \dots, D_n)$

$m_q = e^{i\langle q,X\rangle}$ où $X = (X_1, \dots, X_n)$ $X_i =$ (multiplication par les x_i)

n.b. $[D_k, X_\ell] = \frac{\delta_{k\ell}}{i} Id$

On a $\tau_p m_q u(x) = e^{i\langle q,x+p\rangle} u(x+p)$

$m_q \tau_p u(x) = e^{i\langle q,x\rangle} u(x+p)$

et donc $(\tau_p m_q)(m_q \tau_p)^{-1} = e^{i\langle q,p\rangle}$

Donc le groupe de Heisenberg est décrit par les $e^{is} e^{i\langle q,X\rangle} e^{i\langle p,D\rangle}$

La description classique correspond aux $e^{i(t+\langle q,X\rangle+\langle p,D\rangle)}$.

On passe de l'une à l'autre par l'égalité $e^{i(t+\langle q,x\rangle+\frac{1}{2}\langle q,p\rangle)} u(x+p)$

* Dém sur feuille (2)

i.e. $e^{i(\langle q,X\rangle+\langle p,D\rangle)} = e^{\frac{i}{2}\langle q,p\rangle} e^{i\langle q,X\rangle} e^{i\langle p,D\rangle}$.

On note alors les éléments de ce groupe (q,p,t) : on a

$$(q,p,t)(q',p',t') = (q+q', p+p', t+t'+\tfrac{1}{2}(\langle p,q'\rangle - \langle p',q\rangle))$$

On déduit de cette formule que les vecteurs tangents en 0 $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial q_j}, \frac{\partial}{\partial p_j}$ définissent les champs de vecteurs invariants à gauche (on dérive par rapport à q_j', p_j', t')

$$T = \frac{\partial}{\partial t}, \quad L_j = \frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{1}{2} p_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad M_j = \frac{\partial}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{1}{2} q_j \frac{\partial}{\partial t}$$

Notre construction donne une rep. unitaire π_1 du groupe sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, appelée rep de Schrödinger : on a $\pi_1(q,p,t) = e^{i(t+\langle q,X\rangle+\langle p,D\rangle)}$

$\pi_1(q,p,t)u(x) = e^{i(t+\langle q,x\rangle+\frac{1}{2}\langle q,p\rangle)} u(x+p)$.

** Dém sur feuille (2)

Cette rep est irréductible.

Elle en définit plein d'autres : Si $\delta_{\pm\lambda}$ est la dilatation $(q,p,t) \longmapsto (\pm\sqrt{\lambda}q, \sqrt{\lambda}p, \pm\lambda t)$, $\delta_{\pm\lambda}$ est un morphisme du groupe et $\pi_1 \circ \delta_{\pm\lambda}$ est une représentation.

En la conjuguant avec $u \longmapsto u(\sqrt{\lambda}\,\cdot)$, on voit qu'elle est équivalente à

$\pi_{\pm\lambda}(q,p,t) = e^{i(\lambda t+\lambda\langle q,X\rangle+\langle p,D\rangle)}$

$\pi_{\pm\lambda}(q,p,t)u(x) = e^{i\lambda(t+\langle q,X\rangle+\frac{1}{2}\langle q,p\rangle)} u(x+p)$.

Cela les décrit toutes, avec celles qui sont triviales sur $\{(0,0,t)\}$

On a $\pi_1(T) = i\,Id$, $\pi_1(L_j) = iX_j$, $\pi_1(M_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} = iD_j$

* dém

Considérons $v(s,x) = e^{is(t+q\cdot X+p\cdot D)}u(x)$

Alors $\frac{\partial v}{\partial s} = \left(i(t+q\cdot X) + \sum p_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)v$

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} - \sum p_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)v = i(t+q\cdot x)v$$

→ On pose $f(s) = v(s, x - sp)$ et on a

$$\begin{cases} f(0) = v(0,x) = u(x) \\ f'(s) = i(t+q(x-sp))f \end{cases}$$

et donc $f(s) = e^{i(ts+q\cdot xs - q\cdot p\frac{s^2}{2})}f$

$$v(s,x) = e^{i(ts+q\cdot(x+sp)s - q\cdot p\frac{s^2}{2})}u(x+sp)$$

$$= e^{i(ts+q\cdot xs + q\cdot p\frac{s^2}{2})}u(x+sp)$$

$$v(1,x) = e^{i(t+q\cdot x+\frac{q\cdot p}{2})}u(x+p)$$

---

* * dém Il s'agit de m q si $A\pi(g) = \pi(g)A$ pour tout g, alors A est scalaire

On a $\begin{cases} Ae^{iq\cdot X} = e^{iq\cdot X}A \\ Ae^{ip\cdot D} = e^{ip\cdot D}A. \end{cases}$

en particulier, comme $b(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int \hat{b}(q)e^{iq\cdot x}dq$,

A commute avec la multiplication par toute f° b dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

et donc A est elle même multiplication par une f° $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Or $a(x)u(x+p) = a(x+p)u(x+p) \Rightarrow a$ est constante p.p.!

Construction de V. Bargmann (1961) X_k, D_k op. autoadjoints tels que

$[X_k, D_\ell] = i\,\delta_{k\ell} \quad [X_k, X_\ell]=0 \quad [D_k, D_\ell]=0.$

Posons $U_k = \dfrac{X_k + i D_k}{\sqrt{2}}$, $V_k = \dfrac{X_k - i D_k}{\sqrt{2}}$. On a $U_k^* = V_k$, $V_k^* = U_k$ et

$[U_k, V_\ell] = \delta_{k\ell}$

heuristique

Il y a une solution à ce pb : c'est poser "$U_k = \dfrac{\partial}{\partial z_k}$" et "$V_k = z_k$" z_k variable complexe.

Heuristique pour réaliser cette solution et faire le lien avec la rep de Schrödinger :

- trouver l'espace $\mathcal{H}$ sur lequel U_k et V_k agissent. C'est un espace de f^{ns} analytiques !
- trouver l'unitaire qui conjugue π avec cette rep, i.e.

On va chercher $\rho(x,y)$ et $A(z,p)$ tels que

- $\dfrac{\partial}{\partial z_k}$ et z_k sont conjugués pour $\langle \xi, \eta\rangle = \int \xi(z)\overline{\eta(z)}\rho(z)\,dz$
- L'application $u \xrightarrow{B} \xi : z \longmapsto \int A(z,x)u(x)\,dx$ envoie U_k sur $\dfrac{\partial}{\partial z_k}$ et V_k sur z_k.

Or on a

$$\left\langle \frac{\partial \xi}{\partial z_k}, \eta\right\rangle = \int \frac{\partial \xi}{\partial z_k}(z)\overline{\eta(z)}\rho(z)\,dz$$

$$= \int \Bigg[\underbrace{\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\xi(z)\overline{\eta(z)}\rho(z)\right)}_{\substack{\text{on va espérer que la f}^{n} \text{ soit}\\ \text{nulle à l'infini. Terme nul !}}} - \xi(z)\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\overline{\eta(z)}\rho(z)\right)\Bigg]dz$$

$$= -\int \xi(z)\Bigg(\underbrace{\frac{\partial}{\partial z_k}\overline{\eta}(z)\rho(z)}_{\text{nul car } \eta \text{ analytique}} + \overline{\eta(z)}\frac{\partial \rho}{\partial z}(z)\Bigg)dz$$

On veut que $$= \int \xi(z)\,\overline{z_k\eta(z)}\,\rho(z)\,dz$$

On veut donc que $\dfrac{\partial \rho}{\partial z_k} = -\overline{z}_k\rho$. Or $\dfrac{\partial}{\partial z_k} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_k} - i\dfrac{\partial \rho}{\partial y_k}\right)$.

Donc $$\frac{1}{2}\frac{\partial \rho}{\partial x_k} - \frac{i}{2}\frac{\partial \rho}{\partial y_k} = -x_k\rho + i y_k\rho$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_k} = -2x_k\rho \qquad \frac{\partial \rho}{\partial y_k} = -2y_k\rho$$

$\longrightarrow \rho = c\,e^{-\sum x_k^2 + y_k^2} = c\,e^{-|z|^2}$ on va choisir $c = \pi^{-n}$

(C'est un choix judicieux : alors $\int \rho(z)\,dz = 1$)

$$\textcircled{1}\ B(U_k u) = \frac{\partial B(u)}{\partial z_k}, \quad \textcircled{2}\ B(V_k u) = z_k V(u)$$

$$U_k = \frac{X_k + i D_k}{\sqrt{2}}, \quad V_k = \frac{X_k - i D_k}{\sqrt{2}}.$$

② donne $\langle A(z,\cdot), V_k u\rangle = \langle U_k A(z,\cdot), u\rangle =$

$= z_k B(u)(z) = \langle z_k A(z,\cdot), u\rangle$

$$z_k A = U_k A = \frac{x_k A + \frac{\partial A}{\partial x_k}}{\sqrt{2}}$$

① donne $\langle A(z,\cdot), U_k u\rangle = \langle V_k A(z,\cdot), u\rangle$

$= \frac{\partial B(u)}{\partial z_k}(z) = \langle \frac{\partial}{\partial z_k} A(z,\cdot), u\rangle$

$$\frac{\partial}{\partial z_k} A = V_k A = \frac{x_k A - \frac{\partial A}{\partial x_k}}{\sqrt{2}}$$

i.e.
$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial A}{\partial x_k} = (\sqrt{2} z_k - x_k) A \\ \dfrac{\partial A}{\partial z_k} = \dfrac{x_k A}{\sqrt{2}} - z_k A + \dfrac{x_k A}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2} x_k - z_k) A \end{array}\right| \begin{array}{l} A = c(z_k)\, e^{\sqrt{2} z_k x_k - \frac{x_k^2}{2}} \\ A = c(x_k)\, e^{\sqrt{2} x_k z_k - \frac{z_k^2}{2}} \end{array}$$

ce qui se résout en $A(z,x) = c' e^{-\frac{1}{2}\sum x_k^2 - \frac{1}{2}\sum z_k^2 + \sqrt{2}\sum x_k z_k}$.

Il faut choisir $c' = \boxed{\pi^{-n/4}}$ pour que A soit unitaire

On a donc trouvé une représentation σ_1 telle que,

$$\sigma_1\left(\frac{\frac{1}{i}L_k + M_k}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\partial}{\partial z_k} \qquad \sigma_1(L_k) = i\sqrt{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_k} + z_k\right)$$

$$\sigma_1\left(\frac{\frac{1}{i}L_k - M_k}{\sqrt{2}}\right) = z_k \qquad \sigma_1(M_k) = \sqrt{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_k} - z_k\right)$$

Si on note $\mathcal{L}_0 = \sum L_j^2 + M_j^2$, $\sigma_1(\mathcal{L}_0) = \sum\left(\left[-2\left(\frac{\partial^2}{\partial z_k^2} + \frac{\partial}{\partial z_k} z_k + z_k \frac{\partial}{\partial z_k} + z_k^2\right)\right]\right.$

$$\left. + \left[2\left(\quad - \quad - \quad + \quad \right)\right]\right)$$

$$= -4 \sum \frac{\partial}{\partial z_k} z_k + z_k \frac{\partial}{\partial z_k}$$

$$= -4\left(n + 2\sum z_k \frac{\partial}{\partial z_k}\right) = -W$$

Alors, si on applique l'opérateur W au monôme w^m, on a

$\sum z_k \frac{\partial}{\partial z_k} z^m = \sum m_k z^m = |m| z^m$ et donc

$$W w^m = (4n + 8|m|) w^m$$