

alg algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$ de groupe de Lie G

et conjugaison de Cartan.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ est une décomposition telle que $\mathfrak{d}(\underbrace{x-y}_{\substack{\in \mathfrak{k} \\ \in \mathfrak{p}}}) = \underbrace{x-y}_{\substack{\in \mathfrak{k} \\ \in \mathfrak{p}}}$

$B_{\mathfrak{p}}(X, Y) = -B(X, \mathfrak{d}Y)$ définie positive

$B|_{\mathfrak{k}}$ est définie négative.

$\mathfrak{k}$ correspond au sous-groupe de Lie K comport

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$$

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] = [\mathfrak{p}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{p}$$

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$$

L'application $K \times \mathfrak{p} \rightarrow G$
 $(k, x) \mapsto ke^x$

Prendons $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ sous-algèbre abélienne maximale

(il faut peut-être supposer de plus que $\mathfrak{a}$ est une sa de Cartan de $\mathfrak{g}$)

Pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, posons $\mathfrak{g}_{\lambda} = \{x \in \mathfrak{g} : [a, x] = \lambda(a)x \text{ pour } a \in \mathfrak{a}\}$
"sous-espace propre généralisé"

Le rang réel de $\mathfrak{g}$ est la dimension de $\mathfrak{a}$.

$$\text{On a } \mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{a}^*} \mathfrak{g}_{\lambda}$$

Posons $\mathfrak{m}$ = centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{k}$

$$= \{x \in \mathfrak{k} : \forall a \in \mathfrak{a} [a, x] = 0\} \subset \mathfrak{g}_0$$

$$\Sigma = \{\lambda \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\} : \mathfrak{g}_{\lambda} \neq 0\}$$

On choisit une notion de positivité $\Sigma^+ \subset \Sigma$ telle que $\Sigma^+ \cap (-\Sigma^+) = \emptyset$
 $\Sigma = \Sigma^+ \cup (-\Sigma^+)$

Proposition: Pour x l'adjoint par rapport à $B_{\mathfrak{p}}$, on a $(\text{ad } x)^* = -\text{ad } \mathfrak{d}x$ $\exists \lambda, \mu \in \Sigma^+ \text{ et } \lambda + \mu \in \Sigma, \text{ alors } \lambda + \mu \in \Sigma^+$

$$\text{Dém: } B_{\mathfrak{p}}(\text{ad}(\mathfrak{d}x)y, z) = -B(\text{ad}(\mathfrak{d}x)y, \mathfrak{d}z)$$

$$= B(y, [\mathfrak{d}x, \mathfrak{d}z]) = -B_{\mathfrak{p}}(y, \text{ad } x z)$$

Corollaire: pour $H \in \mathfrak{a}$, $(\text{ad } H)^* = -\text{ad } \mathfrak{d}H = \text{ad } H$, de sorte que $\text{ad } H$ est autoadjoint

Prop: On a plus précisément $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \sum_{\lambda \in \Sigma} \mathfrak{g}_\lambda$ (déc selon les racines)

et $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subseteq \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$ ($\rightarrow$ id. de Jacobi)

Donc $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\lambda$

Alors Prop: (i) $\mathfrak{n}$ est nilpotent (car $\mathfrak{n}$ est de dim finie et $(\mathfrak{g}_{\lambda+\mu})_i$ doit finir par s'annuler)
(ii) $\mathfrak{g}$ est abélien

(iii) $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{n}$ est résoluble: $[\mathfrak{g}, \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{n}$

$[\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{n}, \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{n}$

[Rappel: $\mathfrak{g}$ alg. de Lie. On pose $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_{k+1} = [\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k] \subseteq \mathfrak{g}_k^{(n+1)}$

$\mathfrak{g}_k^{(n+1)} = [\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k^{(n)}]$

Alors nilpotent $\Leftrightarrow \exists n \mathfrak{g}_n = \{0\}$

résoluble $\Leftrightarrow \exists n \mathfrak{g}_{(n)} = \{0\}$

théorème d'Iwasawa: $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$

Dém: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \underbrace{\sum_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\lambda}_{\mathfrak{n}} \oplus \underbrace{\sum_{\lambda \in \Sigma^-} \mathfrak{g}_\lambda}_{\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}}$ puisqu'on a $\mathfrak{g}_{-\lambda} = \mathfrak{g}_{\lambda}^*$ et si $x \in \mathfrak{g}_\lambda$, $[\mathfrak{h}, x] = \lambda(\mathfrak{h})x$ et donc $[\mathfrak{a}, x] = \dots$

Il s'agit de montrer que $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} = \{0\}$: soit $x \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$:

comme $x \in \mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}x = x$ et $x \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Donc $x \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ et $x = 0$.

Notons que $\mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n} = \mathfrak{g}$: soit $x \in \mathfrak{g}$: $x = \mathfrak{h} + \mathfrak{x}_0 + \sum_{\lambda \in \Sigma} \mathfrak{x}_\lambda$
 $\mathfrak{h} \in \mathfrak{a}$ $\mathfrak{x}_0 \in \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{m}$

Lemme: Il existe une base de $\mathfrak{g}$ par rapport à laquelle $\mathfrak{h} + \mathfrak{x}_0 + \sum_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{x}_\lambda + \mathfrak{a} \mathfrak{x}_\lambda + \sum_{\lambda \in \Sigma^-} \mathfrak{x}_\lambda - \mathfrak{a} \mathfrak{x}_\lambda$
 $\in \mathfrak{k}$ $\in \mathfrak{n}$

(i) les $\text{ad } \mathfrak{k}$ sont antisymétriques

(ii) les $\text{ad } \mathfrak{a}$ sont réels et diagonaux

(iii) les $\text{ad } \mathfrak{n}$ sont strictement triangulaires supérieurs $\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$

Une autre version du théorème d'Iwasawa pour algèbres de Lie:

Th: Soit $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ s-alg de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ semi-simple et $\mathfrak{g}$ invariant par $\mathfrak{c}$: $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ et
 $X \in \mathfrak{k} \Leftrightarrow X^* = -X \Leftrightarrow X = \mathfrak{c} X$; $X \in \mathfrak{a} \Leftrightarrow X$ diagonal à coeffs réels; $X \in \mathfrak{n} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$

théorème (Iwasawa pour groupes de Lie): Soit $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ tq $\oplus_{A \in G} GL(n, \mathbb{C}) \xrightarrow{A \mapsto (A^*)^{-1}}$ laisse G invariant; Supposons G semi simple

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ la déc. d'Iwasawa de $\mathfrak{g}$ (alg de Lie de G)

Soient K, A, N sg connexes de G avec algèbres de Lie $\mathfrak{k}, \mathfrak{a}, \mathfrak{n}$.

Alors $K \times A \times N \ni (k, a, n) \mapsto kan \in G \subset GL(n, \mathbb{C})$

et un difféomorphisme sur G . Les groupes A et N sont simplement connexes.

Notons $\check{G} = \text{Ad } G \subset \text{Aut}(\mathfrak{g}) \subset GL(\mathfrak{g})$

$\check{K} = \text{Ad } K$ sont des matrices de rotation et donc $\check{K}$ est compact.

Idee de composition $A = QR$
unitaire triangulaire
rotation

Groupe de Lie semi simple de rang réel 1:

$$\text{so}(1,1) = \{x \in M_2(\mathbb{R}) : x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x^t = 0 \text{ et } \text{tr } x = 0\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{On a } e^{t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}. \text{ Ainsi } \text{SO}(1,1)^\circ = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\};$$

ce groupe n'est même pas simple.

$$\text{SO}(2,1) \text{ ou } \text{SU}(1,1): \text{su}(2,1) \cong \text{su}(1,1) = \{x \in M_2(\mathbb{C}) : x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x^t = 0, \text{tr } x = 0\}$$

$$\text{On pose } \mathfrak{k} = \text{span}\{X_1\}, \mathfrak{p} = \text{span}\{X_2, X_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} ia & b \\ \bar{b} & -ia \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\text{Calculs. on a } \text{ad } X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ad } X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ad } X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; B(X_j, X_k) = \text{tr}(\text{ad } X_j \text{ad } X_k) = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

On choisit $\mathfrak{a} = \text{span } X_2$

$$\mathfrak{g}_2 = \{x \in \mathfrak{g} : [X_2, x] = 2x\} = \text{span}\{X_1 + X_3\}$$

$$\mathfrak{g}_{-2} = \{x \in \mathfrak{g} : [X_2, x] = -2x\} = \text{span}\{X_1 - X_3\}$$

$$\text{On a } K = \left\{ e^{t \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$e^{t(X_1 + X_3)} = e^{t \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1+it & it \\ -it & 1-it \end{pmatrix}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1+it & it \\ -it & 1-it \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour calculer $rX_1 + aX_2 + bX_3$: $\begin{pmatrix} ir & a+ib \\ a-ib & -ir \end{pmatrix}^2 = (a^2+b^2-r^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-r^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-r^2}} \begin{pmatrix} ir & a+ib \\ a-ib & -ir \end{pmatrix}$$

On a localement $SL(2, \mathbb{C}) \cong_{loc} SO(3, 1)$

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus i\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \cong \mathfrak{su}(1, 1) \oplus i\mathfrak{su}(1, 1)$$

base : X_1, X_2, X_3 , $X_4 = iX_1$, $X_5 = iX_2$, $X_6 = iX_3$.

$$\text{ad } X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ad } X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathfrak{k} = \text{span} \{X_1, X_5, X_6\}$$

$$\mathfrak{p} = \text{span} \{X_2, X_3, X_4\}$$

et on choisit $\mathfrak{m} = \text{span } X_2$ (on aurait pu choisir X_3 ou X_4)

$$\mathfrak{m} = \text{centralisateur de } \mathfrak{m} \text{ dans } \mathfrak{k}$$

$$= \text{span} \{X_5\}$$

$$\text{et } \mathfrak{g}_2 = \text{span} \{X_1 - X_3, X_4 - X_6\} = \left\{ \begin{pmatrix} z & -z \\ z & -z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\mathfrak{g}_{-2} = \text{span} \{X_1 + X_3, X_4 + X_6\}$$

On a alors $K = e^{\mathfrak{k}} = SU(2)$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}, N = \left\{ \begin{pmatrix} 1+z & z \\ -z & 1-z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\}$$

— ces deux groupes ne commutent pas :

$$\underline{SU(2, 1)} : \mathfrak{su}(2, 1) = \{ x \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) : x \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} x^* = 0 \text{ et } \text{tr } x = 0 \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12}^* & x_{22} \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x_{11} = -x_{11}^* \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C}) \\ x_{22} = -x_{22}^* \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ x_{12} \in \mathbb{C}^2, \text{ tr } x_{11} + \text{tr } x_{22} = 0 \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} -it & x_{22} & 0 \\ 0 & & x_{22} \end{pmatrix} : x_{22} = -x_{22}^* \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \right\} \cong \mathfrak{u}(2) \text{ et } \dim \mathfrak{k} = 4.$$

$$\text{On a } K \cong U(2) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & u & 0 \\ 0 & & u \end{pmatrix} : u \in U(2) \right\}$$

Il faut faire un choix pour $\mathfrak{m}$: $\mathfrak{m} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathfrak{m} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} \right\}$

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & z \\ z-\bar{z} & 0 & 0 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\} \quad \mathfrak{g}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} it & -it & 0 \\ it & -it & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathfrak{g}_1$ n'est plus abélien et $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \cong \mathfrak{hw}$, l'algèbre de Lie du groupe de Heisenberg.

$$\text{mlr: } \begin{pmatrix} it & -it & z \\ it & -it & z \\ z-\bar{z} & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4t^2 & -4t^2 & 0 \\ 4t^2 & -4t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0. \text{ Donc}$$

$$N = \left\{ e^{\begin{pmatrix} it & -it & z \\ it & -it & z \\ z-\bar{z} & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1+it+\frac{t^2}{2} & -it-\frac{t^2}{2} & z \\ it+\frac{t^2}{2} & 1-it-\frac{t^2}{2} & z \\ \bar{z} & -\bar{z} & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathbb{C} \right\} = \text{"HW"}$$