

Fonctions sphériques

Références: [CH]: l'article de Cowling et Haagerup

[H1, H2]: Helgason: "Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces"
 "Groups and geometric analysis"

[W]: "Zonal spherical function"

I) Décomposition d'Iwasawa pour $SO(n, 1)$, $SU(n, 1)$ et $Sp(n, 1)$

Def: $\mathbb{H}$ est le "corps" ("cas non commutatif") des quaternions
 l'e.v. sous-jacent est $\mathbb{R}^4$ dont on choisit une base $1, i, j, k$,
 qu'on munit d'une structure de $\mathbb{R}$ -algèbre associative en
 donnant une multiplication $\mathbb{R}$ -bilineaire associative définie par
 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

On en conclut par exemple que $ij = -(ij)k^2 = -(ijk)k = k = -ji$

Rem: Si $x \in \mathbb{H}$, on peut voir x comme elt de $M_4(\mathbb{R})$ (la matrice de $x \mapsto xy$)
 (et donc $M_n(\mathbb{H})$ comme $M_{4n}(\mathbb{R})$)

Si $x \in \mathbb{H}$, $x = a + ib + jc + kd$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on pose
 $\bar{x} = a - ib - jc - kd$ et on a $x\bar{x} = \bar{x}x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |x|^2$ où $|x| \in \mathbb{R}^+$

Ceci implique que si $x \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, x a un inverse $\frac{\bar{x}}{|x|^2}$.

Ex: i agit par multiplication par $\begin{matrix} 1 & \mapsto & i \\ i & \mapsto & -1 \\ j & \mapsto & k \\ k & \mapsto & -j \end{matrix}$ et correspond à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

• Si on note m_x la matrice correspondant à x , on a $m_{\bar{x}} = (m_x)^t$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$. On définit

$$SO(n, 1) = \{ A \in M_{n+1}(\mathbb{R}) : A^* K_n A = K_n \text{ et } \det A = 1 \}$$

$$SU(n, 1) = \{ \text{---} \subset \text{---} \}$$

$$Sp(n, 1) = \{ \text{---} \subset \mathbb{H} \text{---} \}; \text{ si on considère ces éléments comme matrices de } M_{4n+4}(\mathbb{R}), \text{ leur déterminant vaut } 1$$

Les algèbres de Lie correspondantes sont

$$so(n, 1) = \{ A \in M_{n+1}(\mathbb{R}) : A^* K_n + K_n A = 0 \text{ et } \text{tr} A = 0 \}$$

$$su(n, 1) = \{ \text{---} \subset \text{---} \}$$

$$sp(n, 1) = \{ \text{---} \subset \mathbb{H} \text{---} \}; \text{ si on considère ces elt comme matrices de } M_{4n+4}(\mathbb{R}), \text{ leur trace vaut } 0$$

Rappel: $Sp(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{H}) : A^* A = I_n \}$ et $sp(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{H}) : A^* + A = 0 \}$

Considérons $\vartheta: A \mapsto -A^*$. Alors $\vartheta(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ si $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{so}(n,1)$ ou $\mathfrak{su}(n,1)$ ou $\mathfrak{sp}(n,1)$

Regardons $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ et $A \in M_{n+1}(K)$: $A^*K_n + K_n A = 0 \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$
 vérifie $A_{11}^* + A_{12} = 0, A_{12}^* = A_{21}, A_{21}^* + A_{22} = 0$

Notons $\mathfrak{k} = \{A \in \mathfrak{g} : \vartheta A = A\} = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} : \begin{matrix} A_{11}^* + A_{11} = 0 \\ A_{22}^* + A_{22} = 0 \end{matrix} \text{ (et } A_{11} + A_{22} = 0 \text{ si } K = \mathbb{C}) \right\}$

$$\mathfrak{p} = \{ -A \} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & C \\ C^* & 0 \end{pmatrix} : C \in K^n \right\}$$

Considérons $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}$ et $A \in \mathfrak{g}$. Calculons $\text{ad} H$ dans

le but de montrer que $\mathfrak{g} = \mathbb{R}H$ est maximale abélienne dans $\mathfrak{p}$ et de déterminer les v.p. et v.g. de $\text{ad} H$

Notons $A = \begin{pmatrix} y & -\tilde{c} & 1 \\ \tilde{c} & x & c \\ 1 & c^* & z \end{pmatrix}$ où $\begin{matrix} \bar{y} = -y \\ x^* = -x \\ \bar{z} = -z \end{matrix}$ (et $y+z+\text{tr} x=0$ si $K=\mathbb{C}$)

Alors $\text{ad} H(A) = [H, A] = \begin{pmatrix} y-1 & c^* & z-y \\ -c & 0 & -\tilde{c} \\ y-z & -\tilde{c}^* & 1-y \end{pmatrix}$ et donc

$$\text{ad} H(A) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ c=\tilde{c}=0 \\ z=y \end{cases} \Leftrightarrow A \in \mathbb{R}H \oplus \left\{ \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \right\} \cap \mathfrak{g}$$

Donc $\mathfrak{g}$ est maximale abélienne et

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} y & & \\ & x & \\ & & y \end{pmatrix} : \begin{matrix} \bar{y} = -y \\ x^* = -x \end{matrix} \text{ (et } 2y + \text{tr} x = 0 \text{ si } K = \mathbb{C}) \right\}$$

Calculons $\mathfrak{g}_\alpha := \{A \in \mathfrak{g} : \text{ad} H(A) = \alpha A\}$:

$$A \in \mathfrak{g}_\alpha \text{ avec } \alpha \neq 0 \Leftrightarrow y-1 = \alpha y = -\alpha z, x=0, -c = \alpha \tilde{c}, -\tilde{c} = \alpha c, z-y = \alpha(1-y) = -\alpha \tilde{c} \\ \Leftrightarrow x=0, y=1, c = -\alpha \tilde{c} = \alpha^2 c, 2y = \alpha z = -\alpha y = \frac{\alpha^2}{2} y$$

Donc $A \neq 0 \Rightarrow \alpha^2 \in \{1, 4\}$

$$\text{On trouve } \mathfrak{g}_{\pm 1} = \left\{ \begin{pmatrix} \pm c^* & \\ \mp c & c \end{pmatrix} : c \in K^{n-1} \right\}$$

$$\mathfrak{g}_{\pm 2} = \left\{ \begin{pmatrix} y & \mp y \\ \pm y & -y \end{pmatrix} : y \in K \text{ et } \bar{y} = -y \right\} \quad (= \{0\} \text{ si } K = \mathbb{R})$$

À partir de maintenant, on suppose $K \neq \mathbb{R}$ et on pose

$\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ et on va justifier que $\mathfrak{u}$ est de type H.

On pose $\mathfrak{z} = \mathfrak{g}_2$ muni de $|Z| = \frac{\sqrt{y\bar{y}}}{2}$ si $Z = \begin{pmatrix} y & -y \\ y & -y \end{pmatrix}$

$\mathfrak{w} = \mathfrak{g}_1$ muni de $|V| = \left| \begin{pmatrix} -c & c^* \\ c^* & c \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\sum c_i \bar{c}_i}$.

On définit $\sigma: \mathfrak{z} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{w})$ par $\langle \sigma(Z)V, V' \rangle$

Soit $V = \begin{pmatrix} -c^{c^*} \\ c^{c^*} c \end{pmatrix}$ et $V' = \begin{pmatrix} -c'^{c'^*} \\ c'^{c'^*} c' \end{pmatrix}$. Alors $\langle j(z)V, V' \rangle = \langle z, \begin{pmatrix} c'^{c'^*} c - c^{c^*} c' & -\tilde{y} \\ \tilde{y} & -\tilde{y} \end{pmatrix} \rangle$

Notons $z = \begin{pmatrix} y & -y \\ y & -y \end{pmatrix}$. On a $\langle j(z)V, V' \rangle = \frac{1}{4} \operatorname{Re}(\tilde{y} \bar{y}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\operatorname{Im}(c'^{c'^*} c) \bar{y}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(c'^{c'^*} c \bar{y}) = \operatorname{Re}(c'^{c'^*} (\frac{c y}{2}))$ et donc

$$j(z)V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{c y}{2} \end{pmatrix} \text{ et } |j(z)V| = \frac{|y|}{2} |c| = |V| |z|.$$

$$\text{Ainsi } \dim \mathfrak{g} = \begin{cases} 1 & \text{si } K = \mathbb{R} \\ 3 & \text{si } K = \mathbb{H} \end{cases} \text{ et } \dim \mathfrak{so} = \begin{cases} 2(n-1) & \text{si } K = \mathbb{R} \\ 4(n-1) & \text{si } K = \mathbb{H} \end{cases}$$

$$\text{On pose } 2r = 2 \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{so} : \text{ ainsi } r = \begin{cases} n & \text{si } K = \mathbb{R} \\ 2n+1 & \text{si } K = \mathbb{H} \end{cases} \\ = \dim(\operatorname{ad} H|_{\mathfrak{m}})$$

Calculons aussi $(V, z) = e^{V + \frac{z}{4}}$, sachant que $Vz = zV = 0$ et $z^2 = 0$.

$$= 1 + V + \frac{z}{4} + \frac{1}{2} V^2 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{y}{4} - \frac{|c|^2}{2} & c^* & -\frac{y}{4} + \frac{|c|^2}{2} \\ -c & 1 & c \\ \frac{y}{4} - \frac{|c|^2}{2} & c^* & 1 - \frac{y}{4} + \frac{|c|^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } |(V, z)_{n+1, n+1}|^2 = \left| 1 + \frac{|c|^2}{2} - \frac{y}{4} \right|^2 = \left(1 + \frac{|c|^2}{2} \right)^2 + \frac{|y|^2}{16} = \left(1 + \frac{|V|^2}{2} \right)^2 + \frac{|z|^2}{4} \text{ imaginaires !} \\ = 1 + \frac{1}{4} (|V|^4 + |z|^2 + 4|V|^2)$$

II Retour au cas général. On va considérer G groupe de Lie connexe, $\mathfrak{g}$, K sous-groupe compact maximal d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{m} = \bigoplus_{\alpha > 0} \mathfrak{g}_{\alpha}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k}$, $N = e^{\mathfrak{m}}$, $A = e^{\mathfrak{a}}$

Théorème : Iwasawa : $K \times A \times N \rightarrow G$
 $(k, a, n) \mapsto kan$ est un difféomorphisme surjectif.

Cartan : $K \bar{A}^+ K = G$, où $\bar{A}^+$ est l'adhérence de $e^{-\mathfrak{a}}$
 $\{e^{\mathfrak{a}t} : t \geq 0\}$ si $\dim \mathfrak{a} = 1$.

Bruhat : $\bar{N} \times M \times A \times N \rightarrow G$
 $(\bar{n}, m, a, n) \mapsto \bar{n} m a n$ est un difféomorphisme sur son image, ouverte dense, dont le complémentaire est de mesure nulle,
 où $\bar{N} = e^{\bar{\mathfrak{m}}} = e^{\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}}$ et $M = \{X \in K : Xa = aX \text{ pour tout } a \in A\}$

Remarque : $B = MAN$ est un sous-groupe de G : $(man)(m'a'n') = mm' a \underbrace{a'o'(m'a')n(m'a')n'}_{\in N}$

$\rightarrow$ Si $x = m'a'$, on a pour tout $X \in \mathfrak{a}$ $\operatorname{ad}_x(X) = x^{-1} X x = X$ et donc $\operatorname{ad}_x(\mathfrak{g}_{\alpha}) \subset \mathfrak{g}_{\alpha}$ pour tout α car ad_x morphisme d'algèbre de Lie.

(B est un $\mathfrak{p}$ -parabolique, appelé $\mathfrak{p}$ de Borel : est conjugué à un groupe contenant B contenu dans G)

Prop: Si $G = Sp(n, 1)$ ou $Su(n, 1)$, $K = \begin{pmatrix} Sp(n) & 0 \\ 0 & \mathbb{T} \end{pmatrix}$ avec $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. (4)

Si $V \in \mathbb{R}^n$, $z = \underbrace{z_0}_{\substack{\text{wasawa} \\ \in \mathbb{N}}} \underbrace{(V, z)}_{\substack{\text{Cartan} \\ \in \mathbb{N}}} \in K e^{tH} N$ où $e^t = \sqrt{(1+|V|^2)^2 + |z|^2}$

et $(V, z) \in K e^{tH} K$ où $4 \sinh^2 t = 4(|V|^2 + |V|^4 + |z|^2)$

Preuve $\textcircled{2} e^{tH} = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix}$ et $l(e^{tH})_{n+1, n+1} = \cosh^2 t = 1 + \sinh^2 t$

et $l((V, z))_{n+1, n+1} = 1 + \frac{1}{4} (\leftarrow) \quad [\text{le coefficient à droite ne change pas}]$

Prop de Haar sur un groupe de Lie : elle est déterminée infinitésimalement.

Prop: G groupe de Lie et $d\mu$ une mesure de Haar à gauche. Evol eg

Si $x_0 \in G$ et $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, $\int f(x x_0) d\mu(x) = |\det \text{Ad } x_0| \int f(x) d\mu(x)$.

Justification: Si $f(u) = \chi_u$, $u \in U$, U voisinage borné de 0 dans $\mathfrak{g}$, homotopie

$\int f(u) du \sim_{t \rightarrow 0} C_0 \times \text{Vol}(tU)$ et

$\int f(x x_0) d\mu(x) = \int f(x_0^{-1} x x_0) d\mu(x) = \int \chi_{x_0^{-1} x x_0} d\mu(x) \simeq \int \chi_{x \in e^{t \text{Ad } x_0}(U)} d\mu(x)$
 $\sim_{t \rightarrow 0} C_0 \text{Vol}(t \text{Ad } x_0(U)) = |\det \text{Ad } x_0| (C_0 \text{Vol}(tU)) = |\det \text{Ad } x_0| \int f(x) d\mu(x)$

Conséquence: Un groupe de Lie est unimodulaire et est semi-simple, ou nilpotent

preuve: dans tous ces cas, $|\det \text{Ad } x| = 1$:
 - si semi-simple, $\text{Ad } x$ est compact et $\text{Ad } x$ préserve la forme de Killing
 - si nilpotent, $\text{ad}(x^n) = e^{\text{Ad}(x^n)}$ nilpotent donc de trace nulle.

$\det(e^{t \text{Ad } x}) = e^{t \text{tr Ad } x} = 1$.

th: Décomposition d'Iwasawa pour la mesure de Haar:

Def: Si $a \in A$, $g(a) = e^{\frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \dim \mathfrak{g}_\alpha \alpha(H)}$
 $e^H, H \in \mathfrak{a}$ $\text{tr ad } H|_{\mathfrak{n}}$

(si G derang 1, $g(e^{tH}) = e^{rt}$)

Si $f \in C_c(G)$, $\int f(g) dg = \int_{KAN} f(kan) g(a)^2 dk da dn$.

si la mesure de Haar sont bien normalisées.

Preuve: par décomposition d'Iwasawa, il existe $D : K \times A \times N \rightarrow \mathbb{R}^+$ différentiable

tel que $\int f(g) dg = \int f(kan) D(k, a, n) dk da dn$ "plus de dg et de variable"

On a $d(a'g) = dg$ et $d(a'h) = dh$ et donc $D(h, a, n) = D(a, n)$

$d(gn') = dg$ et $d(nn') = dn$ et donc $D(a, n) = D(a)$ $a a_0^{-1} a_0 n_0^{-1}$

Soit $a_0 \in A$ et posons $\tilde{f}(g) = f(g a_0^{-1})$. Alors $\int f(h, n, u) D(n) dh da du = \int \tilde{f}(h a_0 a_0^{-1}) D(a_0) da du$

Faisons le chgt de variable $a' = a a_0^{-1}$: $\int = \int f(h a' a_0 n a_0^{-1}) D(a' a_0) dh da_0 dn$
 $n' = a_0 n a_0^{-1}$: $\int g(a_0 n a_0^{-1}) dn = \int g(n') | \det ad a_0^{-1} |_N | dn'$

Donc $\int f(h a n) D(a) dh da dn = \int f(h a' n') | \det ad a_0^{-1} |_N | D(a' a_0) dh da_0 dn'$

Si $a_0 = e^{H_0}$, $ad a_0 = e^{Ad H_0}$ et $\det(ad a_0^{-1}) = e^{-\text{tr } Ad H_0} = g(a_0)^2$

En effet, $D(a) = D(a a_0) g(a_0)^2$ presque sûrement oua

En $a=e$, $D(a_0) = D(1) g(a_0)^2$

Lemme : (Lec de Bruhat) Soit $g \in G$ et $F \in C(K)$.

Notons pour $n \in A$, $n = \underbrace{h(n)}_K \underbrace{a(n)}_A \underbrace{n(n)}_N$. On a $\int_K F(h(g \tilde{h})) d\tilde{h} = \int_K F(\tilde{h}) g(a(g \tilde{h}))^2 d\tilde{h}$
 $\int_K F(h(g \tilde{h})) g(a(g \tilde{h}))^2 d\tilde{h} = \int_K F(\tilde{h}) d\tilde{h}$

Dém: considérons $I_1 \in C_c(AN)$ positive et $f(n) = F(h(n)) F_1(a(n)n(n))$.

Considérons $\tilde{f}(n) = f(gn)$. Si $n = kan$, $gn = ghan = \underbrace{h(gh)}_{\in K} \underbrace{a(gh)}_{\in A} \underbrace{a^{-1}n(gh)a}_{\in N}$

$$\begin{aligned} \text{Or } \int_A f(n) dn &= \int \tilde{f}(n) dn \text{ et donc } \int F(h) dh \int F_1(a(n)) g(a)^2 da dn \\ &= \int F(h(gh)) g(a)^2 F_1(a(gh) a a^{-1} n(gh) a) dh da dn \\ (n' = a^{-1} n(gh) a) &= \int F(h(gh)) F_1(a(gh) a n') dh da dn' \times g(a^2) \\ (a' = a(gh) a) &= \int F(h(gh)) F_1(a' n') g(a')^2 g(a(gh))^2 dh da dn' \\ &\quad \text{(g est un morphisme de groupe)} \\ &= \int F(h(gh)) g(a(gh))^{-2} dh \text{ à une constante multiplicative pr.} \end{aligned}$$

Th (forme mesurée de la décomposition de Bruhat)

$$\bar{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\bar{n} \longmapsto g(a(\bar{n}))^{-2}$ est intégrable sur $\bar{N}$ (on normalise $d\bar{n}$ de sorte que $\int g(a(\bar{n}))^{-2} d\bar{n} = 1$)

Si $F: K \xrightarrow{\text{continue}} \mathbb{C}$ et telle que $F(hm) = F(h)$ pour tout $m \in M$, alors

$$\int F(h) dh = \int_{\bar{N}} F(h(\bar{n})) g(a(\bar{n}))^{-2} d\bar{n}$$

[calcul de $dg/(dn da dn)$]

Dém: La Lec de Bruhat implique que $\bar{N} \xrightarrow{\quad} K/M$
 $\bar{n} \longmapsto h(\bar{n}) M$ est un difféomorphisme d'image

de mesure totale. Donc il existe ψ continue ≥ 0 telle que $\int F(h) dh = \int F(h(\bar{n})) \psi(\bar{n}) d\bar{n}$

pour tout $F: K/M \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Soit $x \in \bar{N}$ et $F \in C(K/M)$ et posons

$$G(\tilde{h}) = F(h(n^{-1} \tilde{h})). \quad G \in C(K/M) \text{ et par le lemme, } \int_K G(\tilde{h}) d\tilde{h} = \int_K F(h) g(a(n \tilde{h}))^2 d\tilde{h}$$

et aussi $\textcircled{1} = \int_{\bar{N}} F(h(x^{-1} h(\bar{n}))) \psi(\bar{n}) d\bar{n}$ et $\textcircled{2} = \int_K F(h(\bar{n})) g(a(n h(\bar{n})))^2 \psi(\bar{n}) d\bar{n}$. Par le

chgt de variable $\bar{n}' = x^{-1} \bar{n}$, $\textcircled{1} = \int_{\bar{N}} F(h(\bar{n}')) \psi(x \bar{n}') d\bar{n}'$ et donc, $n \bar{n} \in \bar{N}$, $\psi(n \bar{n}) = g(a(x h(\bar{n})))^2 \psi(\bar{n})$

Posons $\bar{n} = e$: $\psi(n) = g(a(n))^{-2} \psi(1)$.