

Fonctions sphériques (suite)

I Généralité sur les f^u sphériques "unitaires".

II Généralisation holomorphe : le cas des groupes de Lie $\frac{1}{2}$ réels de rang 1.

→ $\begin{cases} \text{I} & \text{À partir de rep. unitaires.} \\ \text{II} & \text{d'extensions holomorphes. (i.e., représentées)} \end{cases}$

(I) G groupe l.c., $K \subset G$ sous-groupe compact.

Notation : $L^2(G/K) := \{f \in L^2(G) : f(gh) = f(g) \text{ pour } h \in K\}$ ou $f(g)f(n) = f(ng)$

Notons $P: L^2(G) \rightarrow L^2(G/K)$ projection $\perp$: $Pf(n) = \int_K f(nh) dh$
proba de Haar sur K

Notons $\pi: G \rightarrow \mathcal{U}(L^2(G/K))$ la restriction de la rép. rég. gauche λ .

Fait : $\pi(G)' = P \pi(G)'' P = \{P\pi(x) \mid L^2(G/K) : x \in \pi(G)''\}$.

→ π commute à λ ! et si P projection de $\mathcal{B}(H)$ et $\mathcal{K}$ a.v.N de $\mathcal{B}(H)$,
 on a $(P\mathcal{K}P)' = P\mathcal{K}'P$.

Définition : (G, K) est une paire de Gelfand si $\pi(G)'$ est abélien.

Calcul : Si $f \in L^1(G)$, $\pi(f)\xi(n) = \int_G f(g)\xi(ng) dg$
 $\xi \neq 0$ et $\|\pi(f)\|_{\mathcal{B}(L^2(G/K))} \leq \|f\|_{L^1(G)}$

et $P\pi(f)|_{L^2(G/K)} = \pi(\tilde{f})|_{L^2(G/K)}$ où $\tilde{f}(n) = \int_{K \times K} f(kxk') dk dk'$.

Donc $\pi(G)' = \pi(\tilde{f})|_{L^2(G/K)}$, $\tilde{f} \in C_c(K \backslash G / K)$

notation : $A(K \backslash G / K) = C^*$ -algèbre engendrée par $\pi(C_c(K \backslash G / K))|_{L^2(G/K)}$
produit de convolution

Conclusion : $\pi(G)' \text{ abélien} \Leftrightarrow (C(K \backslash G / K), *) \text{ abélien}$
 $\Rightarrow A(K \backslash G / K) \text{ abélien}$

Caractères de $A(K \backslash G / K)$: $\chi: A(K \backslash G / K) \rightarrow \mathbb{C}$ $*$ -homomorphisme

Or $L^1(K \backslash G / K) \in A(K \backslash G / K)$. Donc $\exists h \in L^\infty(K \backslash G / K)$ $\chi(f) = \int f(n)h(n)dn$

[voir que $L^1(G) \xrightarrow{\text{moyennage}} L^1(K \backslash G / K) \xrightarrow{\text{injection}} \mathbb{C}$]

Définition: Une $f^{\sim}$ sphérique pour une paire de Gelfand est une fonction $h \in L^{\infty}(K \backslash G/K)$ telle que $L^{\infty}(K \backslash G/K) \rightarrow \mathbb{C}$
 $f \mapsto \int f(x) h(x) dx$ s'étend en un caractère de $A(K \backslash G/K)$.

6/3/2012 (2)

- Propriétés: Si h est une $f^{\sim}$ sphérique,
- (1) h est uniformément continue
 - (2) $\int_K h(xky) dk = h(x) h(y)$ si $x, y \in G$
 - (3) $h(e_G) = 1$
 - (4) h est de type positif
 - (5) $f * h$ est proportionnelle à h si $f \in C_c(K \backslash G/K)$

De plus, h satisfait (1)-(5),
 h est sphérique.

Dém de (2): Soit $\chi(f) = \int f h$ est un caractère, alors $\chi(f * g) = \chi(f) \chi(g)$ si $f, g \in C_c(K \backslash G/K)$

$$\text{i.e.} \quad \iint f(y) g(y^{-1}x) dy h(x) dx = \int f(x) h(x) dx \int g(y) h(y) dy$$

$$x = y^{-1}u : \iint f(y) g(\tilde{u}) h(y\tilde{u}) d\tilde{u} dy = \int f(y) g(\tilde{u}) h(\tilde{u}) h(y) d\tilde{u} dy$$

$$\text{i.e.} \quad \int f(y) g(u) \left(h(y) h(u) - \int_K h(y) h(u) dh \right) du dy = 0$$

car f est K -biinvariante. Or h est K -biinvariante, donc $h(y) h(u) = \int_K h(yk) h(u) dk$ si $x, y \in G$.

Dém de (4): $\chi(f * f^*) \geq 0$ pour $f \in C_c(K \backslash G/K)$

$$S(x \mapsto \int_K \overline{f(y)} f(yx) dy)$$

$$\text{et } \chi(f * f^*) = \iint_{G \times G} h(u) \overline{f(y)} f(yu) dy du$$

$$\stackrel{x=yu}{=} \int_{G \times G} \overline{f(\tilde{u})} \overline{f(y)} h(y^{-1}\tilde{u}) d\tilde{u} dy \geq 0$$

i.e. h est de type positif!

Dém de (5)

Soit $g \in C_c(K \backslash G/K)$: $\int g(u) f * h(u) du = \int g(u) \int_K \overline{f(y)} h(y^{-1}u) dy du$

$$\stackrel{x=y^{-1}u}{=} \int g(u) \int_K \overline{f(y)} h(yu) dy du$$

Notons $\tilde{f}(u) = \overline{f(u^{-1})}$: on a $\int \tilde{f} * g(\tilde{u}) h(\tilde{u}) d\tilde{u} = \chi(\tilde{f} * g) = \chi(\tilde{f}) \chi(g)$.

On a donc $\int g(u) f * h(u) du = \int \chi(\tilde{f}) h(u) g(u) du$ pour tout g

et donc $h(u) \tilde{\chi}(f) = f * h(u)$

Remarque importante: par (4), $\|h\|_{B(G)} = 1$ puisque leur norme et leur valeur en 1.

$$\text{et } \|h\|_{B(A(G))} = 1, \text{ i.e. } \left\| \begin{matrix} C_c^*(G) \rightarrow C_c^*(G) \\ \lambda(f) \mapsto \lambda(hf) \end{matrix} \right\|_{cb} = 1$$

$$\text{i.e. } \left\| \begin{matrix} A(G) \rightarrow A(G) \\ u \mapsto uf \end{matrix} \right\|_{cb} = 1.$$

Proposition Soit G groupe de Lie semisimple et K groupe compact de Cartan.
 $K = \{x \in G : \vartheta(x) = x\}$ (Soit $a \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$, $\vartheta(x) = (e^{ad a})^{-1}x$ ou peut se réaliser) et $K = G \cap U_m(\mathbb{C})$
 Alors (G, K) est de Gelfand

Preuve: $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ où $\mathfrak{k} = \{x : \vartheta(x) = x\}$ et $\mathfrak{p} = \{x : \vartheta(x) = -x\}$

(en supposant que G est connexe). Fait: $G = \exp \mathfrak{k} \exp \mathfrak{p}$: en effet, $\exp \mathfrak{k} \exp \mathfrak{p} (\exp \mathfrak{k})^{-1} \in \exp \mathfrak{p}$ si $p \in \mathfrak{p}$.

ϑ induit un automorphisme de $C_c(K \backslash G / K)$ par $f \mapsto \tilde{f}(x) = f(\vartheta(x))$

Mais si $x = x_k x_p$, $\vartheta(x) = \vartheta(x_k) \vartheta(x_p)$. Donc $\tilde{f}(\vartheta(x)) = f(x_p^{-1}) = f(x^{-1})$.

Comme $x \mapsto x^{-1}$ inverse l'ordre dans le produit, $f \mapsto \tilde{f}$ est un antiautomorphisme.

Or $\tilde{f * g} = \tilde{f} * \tilde{g}$. Donc $\tilde{f} * \tilde{g} = \tilde{g} * \tilde{f}$ pour tous f, g ! $\square$

Construction de fonctions sphériques:

Cadme: G groupe de Lie semisimple et K de Cartan.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ sous-algèbre maximale.

$\forall \alpha \in A^+ : \mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} : ad a(x) = \alpha(a)x \text{ pour } a \in A\}$ où $A = \exp \mathfrak{a}$

Ordre sur A^+ : $\mathfrak{m} = \bigoplus_{\alpha > 0} \mathfrak{g}_\alpha$
 $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} = \mathfrak{g}_0$
 $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k}$

$N = \exp \mathfrak{m}$

$\overline{N} = \exp(\vartheta(\mathfrak{m})) = \bigoplus_{\alpha < 0} \mathfrak{g}_\alpha$

$M = \{h \in K : hx = xh \text{ pour } x \in A\}$

(pas nécessairement connexe même si G l'est!)
 Not B meson pas nécessairement unimodulaire!

On pose $B = MAN$ sous-groupe de G .

Soit $\chi : A \rightarrow \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ caractère.

On peut alors étendre χ en un caractère par $\chi(man) = \chi(a)$.

On définit $\pi = \text{ind}_B^G(\chi)$, i.e.

$\mathcal{H}^\chi = \text{compléti de } \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ continu tel que } f(xh) = [\chi(h)]^r f(x) \text{ pour } x \in G, h \in B\}$

où $\rho(\exp \frac{a}{n}) = e^{Tr(ad a / m)}$

pour la norme $\|f\|_{\mathcal{H}^\chi} = \int |f(k)|^2 dk$.

On a tout pour le moment qu'on obtient bien une rep. unitaire $\rightarrow$ cf. exposé de François

$(\pi \chi(n)f)(y) = f(n^{-1}y)$

Quels sont les vecteurs K -invariants de H^X ?

Si $f \in H^X$, f K -invariante (et f continue)

pour tout $x \in G$ on écrit $x = k(n) a(n) n(n) \in KAN$ décomposition d'Iwasawa de G
 et $f(n) = f(a(n) n(n)) = f(x) \times (\rho X(a(n) n(n)))^{-1}$
 $= f(n) [\rho X(a(n))]^{-1}$.

Notons $\Pi_X(n) = [\rho X(a(n))]^{-1}$. Π_X est K -invariant et $\|\Pi_X\|_{X^K} = 1$.

Théorème: $\varphi_X(n) = \langle \Pi_X(n) \Pi_X, \Pi_X \rangle$ est une fonction sphérique

[Harish-Chandra: toutes les f^m sphériques ont de cette forme]

Dém: ① $\varphi_X(kxk') = \langle \Pi_X(n) \overbrace{\Pi(k')}^{\Pi_X} \Pi_X, \overbrace{\Pi(k')}^{\Pi_X} \Pi_X \rangle \rightarrow$ est unitaire
 $= \varphi_X(n)$.

$$\begin{aligned} \text{② Soient } x, y \in K. \int \varphi_X(xky) dk &= \int \varphi_X(nkh'k') dk dk' \\ &= \int_{K \times K'} \langle \Pi(k') \underbrace{(\Pi(y) \Pi_X)}_{\Xi_y}, \Pi(k) \underbrace{(\Pi(n') \Pi_X)}_{\Pi_X} \rangle dk dk' \\ &= \left\langle \underbrace{\int_K \Pi(k') \Xi_y dk'}_{\in X^K \text{ et } K\text{-invariant}} \right. \\ &\quad \left. \underbrace{\int_K \Pi(k) \Pi_X dk}_{C(n) \Pi_X} \right\rangle \\ &\quad \text{donc} = C(y) \Pi_X \\ &= C(y) C(x) \end{aligned}$$

$$\text{Si } y = 1_G, C(n) \times C(1) = \varphi_X(n) \text{ et } C(1) = 1. \text{ Donc } C(n) = \varphi_X(n).$$

3-4-5 a d'mc (3: implicite).

II Le cas de $SU(n,1)$ et $Sp(n,1)$

Rappel: $\dim \mathfrak{sl} = 1$: on fixe $H \in \mathfrak{sl}$ tel que $\mathfrak{sl} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ où $1 \in A^+$ envoie H sur 1 et $2 \in A^+$ envoie H sur 2.

$A = \{e^{tH} : t \in \mathbb{R}\}$. Prenons un caractère de A : $\chi(e^{tH}) = e^{\lambda t}$ où $\lambda \in i\mathbb{R}$.

Maintenant prenons $\lambda \in \mathbb{C}$ quelconque, $\chi(e^{tH}) = e^{\lambda t}$ et $\chi = \chi_\lambda: A \rightarrow \mathbb{C}^*$.

H^X a un sens et Π_X aussi: $\Pi_X(n) \in B(H^X)$. En efft, vérifions que

$\Pi_X(n)$ est borné: soit $f \in H^X$.

$$\| \Pi_X(n) f \|_{X^X}^2 = \int_K |f(n^{-1}k)|^2 dk. \text{ Or } n^{-1}k = k(n^{-1}k) a(n^{-1}k) \text{ (d'après d'Iwasawa)}$$

$$\| \Pi_X(n) f \|_{X^X}^2 = \int_K |f(k(n^{-1}k) a(n^{-1}k))|^2 dk \leq \sup_{a \in A} |\chi(a(n^{-1}k))|^2 \times \int_K |f(k(n^{-1}k))|^2 dk$$

$$\text{Donc } \| \Pi_X(n) f \|_{X^X}^2 \leq C(n) \| f \|_{X^X}^2$$

Rappel: Si $G = SU(n, 1)$ ou $Sp(n, 1)$, $\rho(e^{tH}) = e^{tr}$ où $2r = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_1 \oplus 2 \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_2$ (5)

Nolons $\varphi_\lambda(u) = \langle \pi_\lambda(u) \mathbb{1}_\lambda, \mathbb{1}_\lambda \rangle$

Théorème [Cowling-Haugerup, Th. 2.3] (i) Si $\xi \in \mathcal{H}^\lambda$, $\eta \in \mathcal{H}^{-\bar{\lambda}}$, $\int \xi(k) \overline{\eta(k)} dk$
 $= \left(\int_{\bar{N}} S(a(\bar{n}))^{-2} \right)^{-1} \left(\int_{\bar{N}} \xi(\bar{n}) \overline{\eta(\bar{n})} d\bar{n} \right)$

(ii) $\langle \pi_\lambda(u) \xi, \pi_{-\bar{\lambda}}(v) \eta \rangle_{L^2(K)} = \langle \xi, \eta \rangle_{L^2(K)}$

(iii) $\varphi_\lambda(huh') = \varphi_\lambda(u)$ si $u \in G$ et $h, h' \in K$

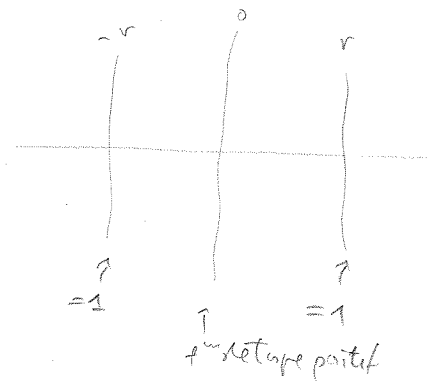
(iv) $\int_K \varphi_\lambda(uhy) = \varphi_\lambda(u) \varphi_\lambda(y)$ si $u, y \in G$

(v) $\lambda \in \mathfrak{c} \mapsto \varphi_\lambda \in C_c(G)$ top de la ω uniforme sur $\mathfrak{c}$ est holomorphe.

(vi) Si $|\operatorname{Re} \lambda| \leq r$, $\|\varphi_\lambda\|_\omega = 1$ et $\varphi_r(u) = \varphi_{-r}(u) = 1$ si $u \in G$.

(vii) Complément, si $|\operatorname{Re} \lambda| < r$, $\varphi_\lambda \in C_0(G)$.

et la suite de Plancherel de φ_λ $\|\varphi_\lambda\|_{\omega(A)} \leq 1/n-1$
 si $|\operatorname{Re} \lambda| \rightarrow r$.



Démonstration: (i) = formule de Parseval simplifiée.

(ii) ok si $u \in K$ puisqu'alors $\pi_\lambda(u) \xi$
 la même de gauche et $\int_K \xi(u^{-1}k) \overline{\eta(u^{-1}k)} dk$
 $= \langle \xi, \eta \rangle_{L^2(K)}$

Si $u \in \bar{N}$, on utilise (i) pour ξ, η d'un côté et pour $\pi_\lambda(u) \xi, \pi_\lambda(u) \eta$ d'un autre.

Fait: K et $\bar{N}$ engendrent G comme groupe.

(iii) et (iv) se font comme dans le cas unitaire.

(v) $\varphi_\lambda(u) = \langle \pi_\lambda(u) \mathbb{1}_\lambda, \mathbb{1}_\lambda \rangle = \int_K \mathbb{1}_\lambda(u^{-1}h) \overline{\mathbb{1}_\lambda(h)} dh$ et on utilise que
 $\lambda \mapsto \chi_\lambda$ est holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $C(A)$.

(vi): Si $\lambda = -r$, $\mathbb{1}_\lambda(kan) = \left[\rho \chi_\lambda(a) \right]^{-1} = 1$ et donc $\varphi_{-r}(u) = \langle \pi_{-r}(u) \mathbb{1}_{-r}, \mathbb{1}_{-r} \rangle = 1$
 car $\chi_r \chi_{-r} = 1$ on conclut par éllation pour le $\lambda = -r$.

$\lambda = r$: $\phi_r(u) = \langle \pi_r(u) \mathbb{1}_r, \mathbb{1}_r \rangle \stackrel{(ii)}{=} \langle \mathbb{1}_\lambda, \pi_{-r}(u^{-1}) \mathbb{1}_{-r} \rangle = 1$
 Pour $\operatorname{Re} \lambda = r$, on ramène à le $\lambda = -r$.
 Puis pour $\operatorname{Re}(u) = \lambda$, cherchons des 3 droits.

13/3/12

Rappel: $G = Sp(n, 1)$ ou $SU(n, 1)$ et

$$\begin{aligned} r &= 2n+1 & r &= n & (r = \frac{1}{2} \text{tr}(\text{ad } H))|_{\mathfrak{u}} \\ p &= 2(n-1) & p &= n-1 \end{aligned}$$

$$N = e^{\mathfrak{u}} = \{(X, Y) = e^{X + \frac{Y}{4}}, X \in \mathfrak{w}, Y \in \mathfrak{z}\}$$

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $|\text{Im } \lambda| \leq r$, on avait défini les f^{u} sphériques $\varphi_{\lambda}: G \rightarrow \mathbb{C}$ K bi-invariants.

Th: Posons $u_{\lambda}(X, Y) = ((1 + |X|^2)^2 + |Y|^2)^{-\frac{\lambda+r}{2}}$ et $a_s = e^{\frac{\log s}{2} H} \in A$, où $H \neq 0$ et λ défini par

$$\text{on a } \varphi_{\lambda}(a_s n) = s^{-\frac{\lambda+r}{2}} \int_N u_{\lambda}(n^{-1} a_s^{-1} n' a_s) u_{-\lambda}(n') dn'$$

où dn' est normalisée de sorte que $\int_{\mathfrak{u}} (n')^{-1} dn' = 1$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{w} &= \mathfrak{g}_1 = \{n \in \mathfrak{g} : \\ \text{ad } H(n) &= n\} \\ \mathfrak{z} &= \mathfrak{g}_2 = \{n \in \mathfrak{g} : \\ \text{ad } H(n) &= 2n\} \end{aligned}$$

Outils de la preuve: si $(X, Y) \in \mathfrak{w} \times \mathfrak{z}$, il existe d'unique $h \in K, n \in N$ tel que
 $(X, Y) = h e^{sH}$, où $e^s = \sqrt{(1 + |X|^2 + |Y|^2)}$