

Reboui sur la construction de Bargmann

d'après Harmonic analysis in phase space de Folland

coefficients matriciels de π_1 : $M(a, p, t) = \langle \pi_1(a, p, t) f, g \rangle$ pour $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$
 $= e^{it} \langle \pi_1(a, p, 0) f, g \rangle$
 $= V(f, g)(a, p)$
 appelée Θ de Wigner.

On a $V(f, g)(a, p) = \langle e^{i(\langle a, X \rangle + \langle p, D \rangle)} f, g \rangle$
 $= \int e^{i(\langle a, x \rangle + \frac{1}{2} \langle a, p \rangle)} f(x+p) \overline{g(x)} dx$ $x = y - \frac{p}{2}$
 $y = x + \frac{p}{2}$
 $= \int e^{i \langle a, y \rangle} f(y + \frac{p}{2}) \overline{g(y - \frac{p}{2})} dy$

Si on pose $\tilde{V}(F)(a, p) = \int e^{i \langle a, y \rangle} F(y + \frac{p}{2}, y - \frac{p}{2}) dy$ pour $F \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$
 $L^2(\mathbb{R}^n) \otimes L^2(\mathbb{R}^n)$,

oua $V(f, g) = \tilde{V}(f \otimes \bar{g})$ et on voit que $\tilde{V}$ est unitaire, envoie la classe de Schwartz sur elle-même et s'étend en une bijection sur le dual de distributions tempérées. En ligne 6 V, cela donne :

V envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ et s'étend en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$

De plus, oua $\langle V(f_1, g_1), V(f_2, g_2) \rangle = \langle \tilde{V}(f_1 \otimes \bar{g}_1), \tilde{V}(f_2 \otimes \bar{g}_2) \rangle$
 $= \langle f_1 \otimes \bar{g}_1, f_2 \otimes \bar{g}_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle \overline{\langle g_1, g_2 \rangle}$

On en conclut d' nouveau que π_1 est irréductible : si M est un $\mathfrak{h}$ invariant et $f \in M \setminus \{0\}$, oua $g \perp M \Rightarrow g \perp e^{i(\langle a, X \rangle + \langle p, D \rangle)} f$, i.e., $V(f, g) = 0$.
 Or alors $\|f\| \|g\| = 0$ et $g = 0$ et $M = L^2(\mathbb{R}^n)$.

Calcul: $V(\pi_1(a', p') f, g)(a, p) = \langle \pi_1(a, p, 0) \pi_1(a', p') f, g \rangle$
 $= \langle \pi_1(a + a', p + p', \frac{1}{2} \langle a, a' \rangle - \langle p, p' \rangle) f, g \rangle$
 $= e^{i \frac{1}{2} (\langle p, a' \rangle - \langle p', a \rangle)} V(f, g)(a + a', p + p')$

Notons $\varphi_0(x) = \pi^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ On a $\|\varphi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$ et donc
 $L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{2n})$
 $f \mapsto V(f, \varphi_0)$ est une isométrie: on a

$$\begin{aligned} V(f, \varphi_0)(q, p) &= \langle f, \pi_1(-q, -p, 0) \varphi_0 \rangle \\ &= \pi^{-\frac{n}{2}} \int f(u) e^{i(\langle -q, u \rangle + \frac{1}{2} \langle q, p \rangle)} e^{-\frac{(u-p)^2}{2}} du \\ &= \pi^{-\frac{n}{4}} \int f(u) e^{i(\langle q, u \rangle - \frac{1}{2} \langle q, p \rangle)} e^{-\frac{(u-p)^2}{2}} du \\ &= \pi^{-\frac{n}{4}} \int f(u) e^{\langle p+iq, u \rangle - \frac{u^2}{2} - \frac{(p+iq)^2}{4} - \frac{p^2}{4} - \frac{q^2}{4}} du \\ &= \pi^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{(p+iq)^2}{4}} \int f(u) e^{\langle p+iq, u \rangle - \frac{u^2}{2} - \frac{p^2}{4}} du \end{aligned}$$

Ponons $Bf(z) = \pi^{-\frac{n}{4}} \int f(u) e^{\langle z, u \rangle - \frac{u^2}{2} - \frac{z^2}{4}} du$

On a $V(f, \varphi_0)(q, p) = e^{-\frac{(p+iq)^2}{4}} Bf(z)$ avec $z = p+iq$.
 $\uparrow$
 appelée ϕ de Bargmann

B est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{C}^n, e^{-\frac{|z|^2}{2}} dz)$.

et son image est en fait l'espace de Bargmann-Fock $\mathcal{H}_m = \{ \text{entiers sur } \mathbb{C}^n : \|f\|^2 = \int |f|^2 e^{-\frac{|z|^2}{2}} dz < \infty \}$

Basis orthonormée de $\mathcal{H}_m$: $e_m(z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{z^m}{\sqrt{m!}}$ avec $m = (m_1, \dots, m_n)$
 $m! = m_1! \dots m_n!$
 $z^m = z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}$

Transférons à présent π_1 en une représentation σ_1 de $\mathcal{H}_m$ sur $\mathcal{H}_m$

Pour cela, introduisons la paramétrisation complexe de $\mathcal{H}_n$:

$$(a, p, t) \leftrightarrow (p+iq, t)$$

$$\text{On a } (z, t)(z', t') = (z+z', t+t' + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \bar{z} z')$$

Définissons $\sigma_1(p+iq, t) B = B \pi_1(a, p, t)$. Calculons σ_1 : Soit $w = r+is$. On a

$$\begin{aligned} (\sigma_1(w, 0) B f)(z) &= (B \pi_1(s, r, 0) f)(z) \\ &= e^{\frac{(r+iq)^2}{4}} V(\pi_1(s, r, 0) f, \varphi_0)(q, p) \\ &= e^{\frac{(r+iq)^2}{4}} e^{i(\frac{1}{2} \langle p, s \rangle - \frac{1}{2} \langle r, q \rangle)} V(f, \varphi_0)(q+r, p+r) \\ &= e^{\frac{(r+iq)^2}{4}} e^{-i \frac{1}{2} \operatorname{Im} z \bar{w}} e^{-\frac{(z+w)^2}{4}} B f(z+w) \\ &= e^{-\frac{|w|^2}{4} - \frac{1}{2} z \bar{w}} B f(z+w) \end{aligned}$$

Donc $\sigma_1(w, t) f(z) = e^{-\frac{|w|^2}{4} - \frac{z \bar{w}}{2}} f(z+w)$.

Calculons σ_1 sur l'algèbre de Lie de $\mathfrak{H}_m$:

(3)

Que deviennent X_j et D_j par conjugaison avec B ?

Prouvons $A_j = \frac{1}{\sqrt{2}} B (X_j + i D_j) B^{-1}$ $A_j^* = \frac{1}{\sqrt{2}} B (X_j - i D_j) B^{-1}$

$$w = r + is \quad \frac{\partial}{\partial w_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r_j} - i \frac{\partial}{\partial s_j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r_j} + i \frac{\partial}{\partial s_j} \right)$$

$$X_j f = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial s_j} \pi_1(s, r, 0) f \Big|_{r=s=0} \quad D_j f = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial r_j} \pi_1(s, r, 0) f \Big|_{r=s=0}$$

Donc $A_j \xi = \frac{1}{\sqrt{2}i} B \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + i \frac{\partial}{\partial r_j} \right) \pi_1(s, r, 0) B^{-1} \xi \Big|_{r=s=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} B \left(\frac{\partial}{\partial w_j} \right) \pi_1(s, r, 0) B^{-1} \xi$

$$= \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial w_j} \sigma_1(w, 0) \xi \Big|_{w=0} = \sqrt{2} \frac{\partial \xi}{\partial z_j}$$

$$A_j^* \xi = \frac{1}{\sqrt{2}i} B \left(\frac{\partial}{\partial s_j} - i \frac{\partial}{\partial r_j} \right) \pi_1(s, r, 0) B^{-1} \xi \Big|_{r=s=0}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial \bar{w}_j} \sigma_1(w, 0) \xi \Big|_{w=0} = -\sqrt{2} \frac{\partial \xi}{\partial \bar{z}_j} = \frac{z_j}{\sqrt{2}} \xi$$

On a $[A_j, A_k] = 0$ $[A_j^*, A_k^*] = 0$ $[A_j, A_k^*] = 0$ si $j \neq k$

$$[A_j, A_j^*] = \frac{\partial \xi}{\partial z_j} z_j - z_j \frac{\partial \xi}{\partial \bar{z}_j}$$

$$= z_j \frac{\partial \xi}{\partial z_j} + \text{Id} - z_j \frac{\partial \xi}{\partial \bar{z}_j} = \text{Id}$$

On a $\sigma_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} L_j + \Pi_j \right) = \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial z_j}$

$$\sigma_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} L_j - \Pi_j \right) = \frac{z_j}{\sqrt{2}}$$

$$\sigma_1(L_j) = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2} \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{z_j}{\sqrt{2}} \right) = i \left(\frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{1}{2} z_j \right)$$

$$\sigma_1(\Pi_j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2} \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{z_j}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{1}{2} z_j$$

Si on note $\mathcal{L}_0 = \sum L_j^2 + \Pi_j^2$, $\sigma_1(\mathcal{L}_0) = \sum \left(-\frac{\partial^2}{\partial z_j^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z_j} z_j - \frac{1}{2} z_j \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{1}{4} z_j^2 \right)$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} z_j^2$$

$$= - \sum \left(\frac{\partial}{\partial z_j} z_j + z_j \frac{\partial}{\partial z_j} \right)$$

$$W_{\text{em}} = (n + 2|m|) e_m$$

$$= - (n + 2 \sum \frac{\partial}{\partial z_j} z_j) = -W$$

Comment définir σ_λ avec $\lambda > 0$?

On pose $\mathcal{H}_{\lambda,2} = \{ \xi \text{ entière sur } \mathbb{C}^n : \|\xi\|^2 = \int |\xi|^2 e^{-\lambda \frac{|z|^2}{2}} dz < \infty \}$.

$$B_\lambda f(z) = e^{\frac{\lambda |z|^2}{4}} \langle \pi_\lambda(q, p, 0) f, \varphi_\lambda \rangle \quad z = x + iy$$

$$\varphi_\lambda(z) = (\pi\lambda)^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{\lambda z^2}{2}}$$

$$B_\lambda f(z) = (\pi\lambda)^{-\frac{n}{4}} \int f(w) e^{\langle z, w \rangle - \frac{\lambda^2}{2\lambda} - \frac{\lambda}{4} z^2} dw.$$

$$\sigma_\lambda(w) = B_\lambda g(s, r) B_\lambda^{-1}$$

$$\sigma_\lambda(w) \xi(z) = e^{-\frac{\lambda}{4} |w|^2 - \frac{\lambda}{2} z \bar{w}} \xi(z+w)$$

$$\sigma_\lambda(w, t) \xi(z) = e^{i\lambda t - \frac{\lambda}{4} |w|^2 - \frac{\lambda}{2} z \bar{w}} \xi(z+w)$$

Que deviennent X_j et D_j par représentation par σ_λ ?

$$\begin{aligned} \Lambda_j f &= \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial w_j} \sigma_\lambda(w, 0) \xi \Big|_{w=0} = \sqrt{2} \left(-\frac{\lambda \bar{w}_j}{4} e^{-\frac{\lambda}{4} |w|^2 - \frac{\lambda}{2} z \bar{w}} \xi(z+w) \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{\lambda}{4} |w|^2 - \frac{\lambda}{2} z \bar{w}} \frac{\partial \xi}{\partial w_j}(z+w) \right) \Big|_{w=0} \\ &= \sqrt{2} \frac{\partial \xi}{\partial z_j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_j^* \xi &= -\sqrt{2} \frac{\partial}{\partial \bar{w}_j} \sigma_\lambda(w, 0) \xi \Big|_{w=0} = -\sqrt{2} e^{-\frac{\lambda}{4} |w|^2 - \frac{\lambda}{2} z \bar{w}} \left[-\frac{\lambda w_j}{4} - \frac{\lambda}{2} z_j \xi(z+w) \right] \Big|_{w=0} \\ &= -\sqrt{2} \frac{-\lambda z_j}{2} \xi = \frac{\lambda z_j}{\sqrt{2}} \xi \end{aligned}$$