

Représentations de groupe de type H.

Rappel : • Algèbre de Lie de type H : • $\mathcal{M} = \mathfrak{so} \oplus \mathfrak{g}$ somme directe de deux a. H. réels de dimension finie, $\dim \mathfrak{so} = 2p$, $\dim \mathfrak{g} = q$, et il existe j comme suit

① • $j: \mathfrak{g} \rightarrow B(\mathfrak{so})$ opérateur linéaire tq $\begin{cases} |j(z)V| = |z||V| \\ j(z)^2 = -|z|^2 Id \end{cases}$

② • on définit le crochet en deux étapes :

① si $V, V' \in \mathfrak{so}$, on définit $[V, V'] \in \mathfrak{so}$ par $\langle z[V, V'], V'' \rangle = \langle j(z)V, V'V'' \rangle$

② on étend $[,]$ à $\mathcal{M}$ par $[V+z, V'+z'] = [V, V']$.

• Caractérisation : ①, ② $\Leftrightarrow \mathcal{M}$ algèbre de Lie telle que $\mathfrak{g}$ est le centre de $\mathcal{M}$ et, si $V \in \mathfrak{so}$, $|V|=1$, $\text{ad}(V): \mathfrak{so} \otimes \text{ker ad}(V) \rightarrow \mathfrak{g}$ est une isométrie surj.

• Groupe de Lie de type H : groupe de Lie réel connexe et simplement connexe dont l'algèbre de Lie est de type H. On note $(v, z) = e^{v + \frac{z}{4}}$.

Représentations : • celle qui sont triviales sur le centre de $\mathcal{M}$ se factorisent en des caractères de $\mathfrak{so}$. Pour les autres, considérons $\omega \in \mathfrak{g}$, $|\omega|=1$ et $\nu > 0$

On a $j(\omega)^2 = -Id$ et on peut choisir une b. on de $\mathfrak{so}$

$(P_1, Q_1, \dots, P_p, Q_p)$ telle que la matrice de $j(\omega)$ soit $\begin{pmatrix} P_1 & Q_1 & \dots & P_p & Q_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$

On a ainsi $\langle \omega, [P_k, P_k] \rangle = \langle \omega, [Q_k, Q_k] \rangle = 0$

$\langle \omega, [P_k, Q_k] \rangle = \delta_{k,2}$

Notons f l'algèbre du groupe de Heisenberg. Alors $\varphi: \mathcal{M} = \mathfrak{so} + \mathfrak{g} \rightarrow f$ $\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_p & P_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum (P_k^2 + Q_k^2) & z & \dots & z & z \end{pmatrix} \mapsto (q, p, \langle \omega, z \rangle)$ est un morphisme d'algèbres de Lie. Voir page ③

Rappel des rep de Schrödinger du groupe de Heisenberg :

$$\pi_\lambda^f(q, p, t) u(x) = e^{i\lambda(t + \langle q, x \rangle + \frac{1}{2} \langle q, p \rangle)} u(x+p)$$

Ici, on va poser pareillement $\pi_\lambda(\sum P_i^2 + \sum Q_i^2, z) u(x)$

$$\pi_\lambda = \pi_\lambda^f \circ \varphi = e^{i\lambda(\langle \omega, z \rangle + \langle q, x \rangle + \frac{1}{2} \langle q, p \rangle)} u(x+p).$$

Rappel des rep de Bargmann-Fock du groupe de Heisenberg :

$$\rho_\lambda(w, t) \xi(z) = e^{\lambda(it - \frac{1}{4}|w|^2 - \frac{1}{2}z\bar{w})} \xi(z+w).$$

On introduit la structure complexe définie par $j(\omega)$ et on définit le produit hermitien, linéaire à droite $\{V, W\}_\omega = \langle V, W \rangle + i \langle j(\omega)V, W \rangle$.

On note $\mathfrak{so}_\omega$ l'a. H. complexe $\mathfrak{so}$ muni de $\{V, W\}_\omega$. On a alors $Q_k = j(\omega)P_k$

On définit $\mathcal{H}_{\lambda, \omega} = \{ \xi \text{ entière sur } \mathfrak{so}_\omega : \| \xi \|_\lambda^2 = \int_{\mathfrak{so}} |\xi(v)|^2 e^{-\frac{\lambda}{2}|z|^2} dz < \infty \}$

18 fandra remplace λ par 4λ !

On pose $\sigma_\lambda = \sigma_\lambda^f \circ \varphi$, i.e.

$$\text{On pose } \sigma_{\lambda,w} \left(\sum_j (p_j + i q_j) p_j, z \right) \xi(w) = e^{\lambda \langle i w, z \rangle - \frac{1}{4} |w|^2 - \frac{1}{2} \{v, w\}_w} \xi(w+z)$$

On va encore noter L_j et M_j les champs de vecteurs invariants à gauche définis par $\frac{\partial}{\partial q_j}$ et $\frac{\partial}{\partial p_j}$.

Calcul de $\sigma_{\lambda,w}(L_j)$ et $\sigma_{\lambda,w}(M_j)$

$$\text{On a } \sigma_{\lambda,w} \left(\frac{\frac{1}{i} L_j + M_j}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial w_j}$$

$$\sigma_{\lambda,w} \left(\frac{\frac{1}{i} L_j - M_j}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} w_j$$

$$\text{et donc } \sigma_{\lambda,w}(L_j) = i \left(\frac{\partial}{\partial w_j} + \frac{\lambda}{2} w_j \right)$$

$$\sigma_{\lambda,w}(M_j) = \left(\frac{\partial}{\partial w_j} - \frac{\lambda}{2} w_j \right)$$

$$\text{et } \sigma_{\lambda,w} \left(\sum_j L_j^2 - \sum_j M_j^2 \right) = -\lambda (n+2|m|) e_m \quad \text{avec } e_m \text{ défini}$$

En remplaçant par 42 dans la formule et par 2 dans les indices, on retrouve la formule de l'article de CH.

$$\text{Les } e_m = e_{m,v,w} \text{ données par } e_{m,v,w}(w) = \left(\frac{2v}{\pi} \right)^{\frac{p}{2}} (2v)^{\frac{|m|}{2}} \frac{w^m}{|m|!}$$

forment une base de $\mathcal{H}_{v,w}$.

$$\text{On a pour } u \in C_c^\infty(N) \quad \Delta^h * u * \Delta^h \in C_c^\infty(N) \text{ et donc } \sigma_{v,w}(\Delta^h * u * \Delta^h) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{v,w})$$

$$| \langle \sigma_{v,w}(\Delta^h * u * \Delta^h) e_m, e_n \rangle | \text{ borné indep de } m, n.$$

$$| \langle \sigma_{v,w}(u * \Delta^h) e_m, \sigma_{v,w}(\Delta^h) e_n \rangle | = \langle (4vp + 8v|m|)^h \sigma_{v,w}(u) e_m, (4vp + 8v|n|)^h e_n \rangle$$

$$\text{et donc } | \langle \sigma_{v,w}(u) e_m, e_n \rangle | \leq C (4vp + 8v|m|)^{-h} (4vp + 8v|n|)^{-h} \leq C' (|m| + |n|)^{-h}$$

Donc $\sigma_{v,w}(u) \in S_1(\mathcal{H}_{v,w})$ comme somme a.c. d'op de rang 1

On dit que $\sigma_{v,w}(u)$ est "tracable".

Un morphisme d'algèbres de Lie d'une application linéaire telle que $\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$.

Les relations $\langle \omega, [P_a, P_e] \rangle = \langle \omega, [Q_a, Q_e] \rangle = 0$ et $\langle \omega, [P_e, Q_e] \rangle = \delta_{ee}$

et le fait que $[u, u] \subset \mathfrak{z}$ montrent que $\varphi: \mathcal{U} = \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{z} \rightarrow \mathfrak{f}$
 $\Sigma(p_e P_e + q_e Q_e) + \mathfrak{z} \mapsto (q, p, \langle \omega, \mathfrak{z} \rangle)$

et bien un morphisme d'algèbres de Lie: ou bien pour

$$V = \Sigma_i (p_i P_i + q_i Q_i), \quad z \in \mathfrak{z} \quad \varphi([V+z, V'+z']) = \varphi([V, V']) = \langle \omega, [V, V'] \rangle$$

$$V' = \Sigma_i (p'_i P_i + q'_i Q_i), \quad z' \in \mathfrak{z}$$

$$\text{et } [\varphi(V+z), \varphi(V'+z')] = [(q, p, \langle \omega, \mathfrak{z} \rangle), (q', p', \langle \omega, \mathfrak{z}' \rangle)]$$

$$= [0, 0, \langle p, q' \rangle - \langle q, p' \rangle];$$

$$\text{or } [V, V'] = \Sigma_i \Sigma_j p_i p'_j [P_i, P_j] + \dots$$

$$\text{et donc } \langle \omega, [V, V'] \rangle = \Sigma_i \Sigma_j p_i q'_j \delta_{ij} - q_i p'_j \delta_{ij} = \langle p, q' \rangle - \langle q, p' \rangle.$$

Ainsi toute représentation π^f de $\mathfrak{f}$ donne lieu à une représentation π de $\mathcal{U}$
 par $\pi = \pi^f \circ \varphi$

Au sujet des représentations des groupes de type H.

Plaçons-nous au niveau de l'algèbre de Lie et soit π une représentation irréductible d'une algèbre de Lie $\mathcal{U} = \mathfrak{w} + \mathfrak{z}$ de type H.

Alors $\pi|_{\mathfrak{z}}$ s'écrit $\pi(0, 0, z) = e^{i\langle \omega, \mathfrak{z} \rangle}$ pour un certain $\omega \in \mathfrak{z}$.

Calculons $\pi([V, V'])$. Or $[V, V'] \in \mathfrak{z}$ et donc $\pi([V, V']) = e^{i\langle \omega, [V, V'] \rangle}$
 $= e^{i\lambda \langle p, q' \rangle - \langle q, p' \rangle}$

avec $\lambda = |\omega|$ et $(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$ écrites de V dans une

base déterminée par $\frac{\omega}{|\omega|}$. En particulier, soit $V = P = \Sigma_i p_i P_i$ et $V' = Q = \Sigma_i q_i Q_i$.

$$\text{Alors } \pi(P)\pi(Q) - \pi(Q)\pi(P) = e^{i\lambda \langle p, q \rangle}$$

et donc, au niveau du groupe, (maintenant P, Q paramètres réels de $\mathfrak{so}(n)$)

$$\pi(P)\pi(Q)\pi(P)^{-1}\pi(Q)^{-1} = e^{i\lambda \langle P, Q \rangle}$$

On peut donc invoquer le théorème de Stone-von Neumann:

$\pi(V)$ est nécessairement équivalent à la représentation de Schrödinger.

Mesure de Plancherel : on cherche une mesure sur l'ensemble des représentations irréductibles (ici indexé par $\mathbb{Z}$!) telle que pour $u \in C_c^\infty(N)$

$$u(0,0) = \int_{\mathbb{Z}} \text{tr}(\sigma_{\nu,w}(u)) d\mu(\nu w)$$

(Idee : exprimer $\text{tr}(\sigma_{\nu,w}(u))$ et faire une inversion de Fourier

$$\text{tr} \sigma_{\nu,w}(u) = \sum_m \lim_{\delta \downarrow 0} \int \sigma_{\nu,w}(u) e_m(v) \overline{e_m(v)} e^{-(\delta+2\nu)|v|^2} dv$$

$$= \lim_{\delta \downarrow 0} \sum_m$$

$$\begin{aligned} & \leq \|\sigma_{\nu,w}(u)\|_{\nu^x} \\ & \left(\int |e_m(v)|^2 e^{-2(\delta+2\nu)|v|^2} dv \right)^{1/2} \\ & \leq 1 \\ & \leq \|\sigma_{\nu,w}(u)\|_{\nu^x} \leq C |w|^{-k} \end{aligned}$$

Mais il fallait commencer par définir une mesure de Haar sur N .

[CH] pose $\int_N f(u) du = \frac{1}{k(p,q)} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}} f(v,z) dz dv$ avec $k(p,q) = 4 \frac{(\frac{\pi}{q})^{\frac{2p+q+1}{2}}}{\Gamma(\frac{2p+q+1}{2})}$

avec la justification suivante : $\iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}} \underbrace{(1+|v|^2)^2 + |z|^2}_{u_r(v,z)}^{-r} = k(p,q)$

→ Par passage aux coordonnées sphériques,

$$\iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}} u_r(v,z) dz dv = \frac{2\pi^p}{\Gamma(p)} \frac{2\pi^{q/2}}{\Gamma(\frac{q}{2})} \iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} ((1+s^2)^2 + t^2)^{-r} t^{q-1} s^{2p-1} dt ds$$

$$t = (1+s^2)u = \frac{4\pi^{p+\frac{q}{2}}}{\Gamma(p)\Gamma(\frac{q}{2})} \iint (1+s^2)^{-2r+q} (1+u^2)^{-r} u^{q-1} s^{2p-1} du ds$$

$$\frac{u^2 = v}{s^2 = w} = \frac{\pi^{p+\frac{q}{2}}}{\Gamma(p)\Gamma(\frac{q}{2})} \iint (1+w)^{q-2r} (1+v)^{-r} v^{\frac{q}{2}-1} w^{p-1} dv dw$$

$$\text{Or } \int \frac{w^{a-1}}{(1+w)^b} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)}$$

en w : $a=p$ $b=2r-q$ en v : $a=\frac{q}{2}$ $b=r$

$$= \frac{\pi^{p+\frac{q}{2}}}{\Gamma(p)\Gamma(\frac{q}{2})} \frac{\Gamma(p)\Gamma(2r-p-q)}{\Gamma(2r-q)} \frac{\Gamma(\frac{q}{2})\Gamma(r-\frac{q}{2})}{\Gamma(r)}$$

$$= \frac{\pi^{p+\frac{q}{2}} 2\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(p+\frac{q}{2})}{2^{2p+q} \Gamma(\frac{2p+q}{2}) \Gamma(\frac{2p+q+1}{2})} = \text{ce qu'il faut}$$

Formule de Plancherel

Notons $\hat{G}$ le quotient des représentations irréductibles par la relation d'équivalence. On va munir $\hat{G}$ d'une topologie et d'une mesure (1) Toute représentation se prolonge en une représentation de la C^* -algèbre complète $C^*(G)$. On considère l'ensemble

$\text{Prim}(G)$ des $\ker \pi$ dans $C^*(G)$ pour π représentation irréductible et on le munit d'une topologie, dite de Jacobson, caractérisée par: si $U \subset \text{Prim}(G)$,

$$\bar{U} = \{ I \in \text{Prim}(G) : I \supset \bigcap_{J \in U} J \}.$$

Comme $\ker \pi$ ne dépend que de la classe de π ,

cela définit une topologie sur $\hat{G}$. (2) Notons $\text{Irr}_n(G)$ l'ensemble des représentations irréductibles de G dans ℓ_2^n et $\text{Irr}(G) = \bigcup \text{Irr}_n(G)$. On munit $\text{Irr}_n(G)$ de la tribu

minimale (celle que pour $\xi, \eta \in \ell_2^n$ et $x \in G$ $\pi \mapsto \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle$ est mesurable, et

$\text{Irr}(G)$ de la tribu limite: $E \in \mathcal{B}$ si $E \cap \text{Irr}_n(G) \in \mathcal{B}_n$ pour tout n . Si G est

séparable, $\pi \mapsto [\pi]$ est une surjection de $\text{Irr}(G)$ sur $\hat{G}$ et cela munit $\hat{G}$ d'une tribu quotient, dite structure de Nachter. Elle est standard si G est de type I.

Pour un groupe de Lie G nullement simplement connexe, voici la théorie de Kirillov:

Considérons l'action coadjointe $Ad^*(u) = Ad(u^{-1})^*$ de G sur le dual $\mathfrak{g}^*$ de son algèbre de Lie. Si $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{f}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ telle que $\lambda|_{[\mathfrak{f}, \mathfrak{f}]} = 0$,

alors $\lambda|_{\mathfrak{f}} : \mathfrak{f} \rightarrow \mathbb{R}$ est un morphisme. Si H est un sous-groupe de Lie d'algèbre

de Lie $\mathfrak{f}$, un relèvement de λ à H est un caractère σ de H tel que $\sigma(e^X) = e^{i\lambda(X)}$.

Théorème: Pour chaque $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ soit $\mathfrak{f}$ sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ maximale telle que $\lambda|_{[\mathfrak{f}, \mathfrak{f}]} = 0$.

Alors $\text{ind}_H^G(\sigma)$ est irréductible et sa classe d'équivalence ne dépend que de l'orbite $\mathcal{O}_\lambda$ de λ sous l'action coadjointe. L'application $\mathcal{O}_\lambda \mapsto [\text{ind}_H^G(\sigma_\lambda)]$ est une bijection

de ces orbites sur $\hat{G}$ qui est un homomorphisme.

Notons $\hat{G}_n = [\text{Irr}_n(G)]$. Considérons le champ mesurable d'espaces de Hilbert $(\mathcal{H}_p)_{p \in \hat{G}}$

tel que si $p \in \hat{G}_n$, $\mathcal{H}_p = \ell_2^n$. Alors il existe un champ mesurable de représentations

$(\pi_p)_{p \in \hat{G}}$ agissant sur $(\mathcal{H}_p)_{p \in \hat{G}}$ tel que $\pi_p \in \mathcal{P}$.

Pour $f \in L^1(G)$, on va poser $\hat{f}(\pi) = \int f(u) \pi(u^{-1}) du$ et $\hat{f} = (\hat{f}(\pi))_{\pi \in \hat{G}}$, mais on va

noter que $\hat{f}(\pi_p)$ est Hilbert-Schmidt et le voir comme élément de $\mathcal{H}_{\pi_p} \otimes \mathcal{H}_{\pi_p}$.

Théorème: Il existe une mesure μ sur $\hat{G}$ unique telle que $f \mapsto \hat{f}$ envoie $L^1(G) \cap L^2(G)$ dans $\int \mathcal{H}_{\pi} \otimes \mathcal{H}_{\pi} d\mu(\pi)$ et s'étend en un certain $L^2(G)$ sur cet espace qui enlève la représentation régulière bilatérale avec $\int \pi \otimes \bar{\pi} d\mu(\pi)$. Formule: ① si $f, g \in L^1 \cap L^2$ $\int f \bar{g} = \int_{\hat{G}} \langle \hat{f}(\pi), \hat{g}(\pi)^* \rangle d\mu(\pi)$

② $(\chi_y g \hat{f})(\pi) = \pi(y) \hat{f}(\pi) \pi(y)^* = [\pi(y) \otimes \bar{\pi}(y)] \hat{f}(\pi).$ ③ si $h \in L^2$, $h(u) = \int_{\hat{G}} \langle \pi(u) \hat{h}(\pi), \hat{h}(\pi) \rangle d\mu(\pi)$