

Calcul de la mesure de Plancherel :

(6)

On cherche μ telle que pour $u \in C_c^\infty(\mathbb{N})$ $u(0,0) = \int_{\mathbb{R}^2} \text{tr}(\sigma_{v,w}(u)) d\mu(v,w)$.

Pour cela, on va chercher à exprimer $\text{tr} \sigma_{v,w}(u) = \sum_{m \in \mathbb{N}^p} \langle \sigma_{v,w}(u) e_m, e_m \rangle$

$$= \sum_m \int_{\mathbb{R}^2} \sigma_{v,w}(u) e_m(v) \overline{e_m(w)} e^{-(\delta+2\nu)|v|^2} dv$$

$$= \sum_m \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{e^{-(\delta+2\nu)|v|^2}} dv$$

$$= \lim \sum_m \int_{\mathbb{R}^2} \dots \text{ par convergence uniforme.}$$

$$\text{Or } \sum_m \int_{\mathbb{R}^2} \dots = \sum_m \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{h(p,q)} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (\sigma_{v,w}(w,z) e_m(v) \overline{e_m(w)}) e^{-(\delta+2\nu)|v|^2} dz dw dv$$

$$h(p,q) \sum_m \int_{\mathbb{R}^2} \dots = \iiint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} e^{-\nu[|w|^2 + 2\{w,v\}_w + i\langle z,w \rangle]} e^{-(\delta+2\nu)|v|^2} \frac{\sum_m (\frac{2\nu}{\pi})^p (2\nu)^{|m|} (w+v)^m \overline{v}^m}{(\frac{2\nu}{\pi})^p e^{-2\nu(\frac{p}{2} + \frac{q}{2}) \frac{|v|^2}{\delta} + \dots + 2\nu(w_p + v_p) \overline{v}_p}} dv dw dz$$

$$= \iiint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} u(w,z) e^{-\nu[|w|^2 + 2\{w,v\}_w + i\langle z,w \rangle]} e^{-(\delta+2\nu)|v|^2} \frac{\sum_m (\frac{2\nu}{\pi})^p (2\nu)^{|m|} (w+v)^m \overline{v}^m}{(\frac{2\nu}{\pi})^p e^{-2\nu(\frac{p}{2} + \frac{q}{2}) \frac{|v|^2}{\delta} + \dots + 2\nu(w_p + v_p) \overline{v}_p}} dv dw dz$$

$$= (\frac{2\nu}{\pi})^p \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} u(w,z) e^{-\nu[|w|^2 + i\langle z,w \rangle]} \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{4i\nu \text{Im}\{v,w\}_w - \delta|v|^2} dv \right) dw dz$$

$$= (\frac{2\nu}{\pi})^p \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} u(w,z) e^{-i\nu\langle z,w \rangle} dt \left(\frac{\pi}{\delta} \right)^p e^{-\frac{4\nu^2|w|^2}{\delta}} e^{-\nu|w|^2} dw$$

En faisant $\delta \rightarrow 0$, $\frac{(2\nu)^p}{(\pi\delta)^p} e^{-\frac{4\nu^2|w|^2}{\delta}} \xrightarrow{w^*} \delta_0$ et donc

$$h(0, \dots) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{(\frac{2\nu}{\pi})^p}{(\frac{\pi}{2\nu})^p} \int_{\mathbb{R}^2} u(0,z) e^{-i\nu\langle z,w \rangle} dz$$

$$\text{et } \text{tr} \sigma_{v,w}(u) = \frac{(\frac{\pi}{2\nu})^p}{h(p,q)} \int_{\mathbb{R}^2} u(0,z) e^{-i\nu\langle z,w \rangle} dz$$

Par une transformation de Fourier, on en déduit

$$u(0,0) = \frac{1}{(2\pi)^q} \int_{\mathbb{R}^2} (\frac{2\nu}{\pi})^p h(p,q) \text{tr} \sigma_{v,w}(u) d(v,w)$$

$$= \frac{2^{p-q}}{\pi^{p+q}} \frac{\pi^{\frac{2p+q+1}{2}} 2^{1-2p-q}}{\Gamma(\frac{2p+q+1}{2})} \frac{2^{-p/2}}{\Gamma(\frac{q}{2})} \iint_{\mathbb{R}^2 \times S_{\mathbb{R}^2}} v^{p+q-1} \text{tr} \sigma_{v,w}(u) dv dw$$

$$= \frac{2^{2-p-2q} \pi^{1/2}}{\Gamma(\frac{q}{2}) \Gamma(\frac{2p+q+1}{2})} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^+} v^{p-1} \text{tr} \sigma_{v,w}(u) dv dw$$

$$\text{et } d\mu = c(p,q) v^{p-1} dv dw.$$

Lemme 3.2: Soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et posons $\tilde{g}(u,v) = \iint g(x,y) e^{2i\mu(yu-xv)} dx dy$. (2)

Alors $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right) \tilde{g}(u,v) = \iint g(x,y) e^{2i\mu(yu-xv)} \left(\frac{1}{2} 2iy + \frac{1}{2} 2ix \right) dx dy$
 $\stackrel{\text{"}}{\frac{\partial}{\partial(u-iv)}} = \mu \iint (u+iy) g(x,y) e^{2i\mu(yu-xv)} dx dy$

$\left[\mu^k (u+iy)^k \right]$

Si $g(x,y) = e^{-\mu(x^2+y^2)}$, $\tilde{g}(u,v) = \frac{\pi}{\mu} e^{-\mu(u^2+v^2)} = \frac{\pi}{\mu} e^{-\mu(u+iv)(u-iv)}$

et donc $\iint (u+iy)^k e^{-\mu(x^2+y^2)} e^{2i\mu(yu-xv)} dx dy = \mu^{-k} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right) \right]^k \left(\frac{\pi}{\mu} e^{-\mu(u^2+v^2)} \right)$
 $\stackrel{(*)}{=} \mu^{-k} \frac{\pi}{\mu} (-\mu)^k (u+iv)^k e^{-\mu(u^2+v^2)} = \frac{\pi}{\mu} (-u-iv)^k e^{-\mu(u^2+v^2)}$

Cette identité, prouvée pour $u,v \in \mathbb{R}$ se prolonge à $u,v \in \mathbb{C}$.

On va en déduire $\iint (u+iy)^k e^{-\nu(x^2+y^2)} e^{-R((u-r)^2+(y-s)^2)} e^{2i\nu(yr-xs)} dx dy$
 $= \pi (r+is)^k (R-\nu)^k (R+\nu)^{k-1} e^{-\nu(r^2+s^2)}$

en posant $\mu = \nu + R$, $u = \frac{\nu r - iR s}{\nu + R}$, $v = \frac{\nu s + iR r}{\nu + R}$

$-\mu(x^2+y^2) + 2i\mu(yu-xv) = -\nu(x^2+y^2) - R(x^2+y^2) + 2i(y\nu r - y i R s - x \nu s - x i R r)$
 $= -\nu(x^2+y^2) - R((u-r)^2+(y-s)^2) + 2i\nu(yr-xs) + Rr^2 + Rs^2$

$(u+iv)^k = \frac{(\nu r - iR s + i\nu s - Rr)^k}{(\nu+R)^k} = (r+is)^k (\nu-R)^k (\nu+R)^{-k}$
 $-\mu(u^2+v^2) = -\frac{(\nu^2 r^2 - R^2 s^2 - 2\nu R s + \nu^2 s^2 - R^2 r^2 + 2\nu R r)}{\nu+R} = -\frac{(\nu^2 - R^2)(r^2 + s^2)}{\nu+R} = (R-\nu)(r^2+s^2)$

et donc $\iint (u+iy)^k e^{-\nu(x^2+y^2)} e^{-R((u-r)^2+(y-s)^2)} e^{2i\nu(yr-xs)} dx dy = \frac{\pi}{\nu+R} (r+is)^k (R-\nu)^k (\nu+R)^{-k} (R-\nu)(r^2+s^2) e^{-\nu(r^2+s^2)}$
 $= \pi (r+is)^k (R-\nu)^k (R+\nu)^{k-1} e^{-\nu(r^2+s^2)}$

Prop 3.3 Rappel: si k est une distribution sur $\mathbb{N}$, on définit $\pi(k)$ de sorte que pour $\xi, \eta \in \mathcal{H}_\mathbb{R}$ $\langle \pi(k) \xi, \eta \rangle = \langle k, \varphi_{\xi, \eta} \rangle$ où $\varphi_{\xi, \eta}(g) = \langle \pi(g) \xi, \eta \rangle$. En particulier, pour la mesure $\phi_R(u) = \int_{\mathbb{R}} u(v,0) e^{-R|v|^2} dv$, on a $\langle \pi(\phi_R) \xi, \eta \rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle \pi(v,0) \xi, \eta \rangle e^{-R|v|^2} dv$
et donc $\pi(\phi_R) \xi = \int_{\mathbb{R}} \pi(v,0) \xi e^{-R|v|^2} dv$. Donc $\sigma_{\nu, w}(\phi_R) \xi(w) = \int_{\mathbb{R}} e^{-R|v|^2 - \nu[|v|^2 + 2\operatorname{Im}(w, v)\bar{w}]} \xi(v+w) dv$
 $= \int_{\mathbb{R}} \xi(v) e^{-R|v-w|^2 - \nu[|v-w|^2 + 2\operatorname{Im}(w, v-w)\bar{w}]} dv = \int_{\mathbb{R}} \xi(v) e^{-R|v-w|^2 - \nu[|v|^2 + 2\operatorname{Im}(w, v)\bar{w} - |w|^2]} dv$
 $= e^{\nu|w|^2} \int_{\mathbb{R}} \xi(v) e^{-\nu|v|^2 - R|v-w|^2} e^{2i\nu \operatorname{Im}(w, v)\bar{w}} dv$. Si ξ est un polynôme homogène de degré d , ξ est somme de monômes de degré d , qui sont au produit de p termes de la forme $(x_j + iy_j)^{k_j}$ avec $\sum k_j = d$. Donc le calcul précédent donne que cela
 $= \pi^p \xi(w) (R-\nu)^d (R+\nu)^{d-p}$

Lemme 3.4 : Calculons la transformée de Radon de $u_\lambda(v, \tau) = ((1+v|^2|^2 + |\tau|^2)^{-\frac{\lambda+r}{2}})$

$$\begin{aligned} \int_{\omega \perp} u_\lambda(v, \tau \omega + z') dz' &= \int_{\omega \perp} ((1+v|^2|^2 + t^2 + |z'|^2)^{-\frac{\lambda+r}{2}}) dz' & z' = \sqrt{(1+v|^2|^2 + t^2)} z'' \quad dz' = (1+v|^2|^2 + t^2)^{\frac{q-1}{2}} dz'' \\ &= \int_{\omega \perp} ((1+v|^2|^2 + t^2)^{-\frac{\lambda+r-p}{2}}) (1+|z'|^2)^{-\frac{\lambda+r}{2}} dz' & \text{passage en coordonnées polaires.} \\ &= u_{\lambda-q+1}(v, \tau \omega) \frac{2\pi^{\frac{q-1}{2}}}{\Gamma(\frac{q-1}{2})} \int_0^\infty (1+p^2)^{-\frac{\lambda+r}{2}} p^{q-2} dp & p^2 = \tau \\ & & 2p dp = d\tau \\ & & \frac{1}{2} \int_0^\infty (1+\tau)^{-\frac{\lambda+r}{2}} \tau^{\frac{q-3}{2}} d\tau & "a = \frac{q-1}{2}" \\ & & & "b = \frac{\lambda+r}{2}" \\ & & & \frac{\Gamma(\frac{q-1}{2}) \Gamma(\frac{\lambda+r-p}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda+r}{2})} \\ &= u_{\lambda-q+1}(v, \tau \omega) \pi^{\frac{q-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+p-1}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda+r}{2})} \end{aligned}$$

Une formule de transformée de Laplace : Soient f, g continues sur $\mathbb{R}^n$ telles que

$$\begin{aligned} |f(x)|, |g(x)| &= O(x^{-\frac{1}{2}+\epsilon}) \text{ en } 0^+ \\ &= O(e^{-ax}) \text{ en } +\infty. \end{aligned}$$

Considérons $h(x) = \begin{cases} e^{-ax} f(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $k(x) = \begin{cases} e^{-a(x+v)} g(x+v) & \text{si } x > -v \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Écrivons la formule de Plancherel $\int_{\mathbb{R}} \hat{h}(b) \overline{\hat{k}(b)} db = 2\pi \int_{\mathbb{R}} h(x) \overline{k(x)} dx$ où $\hat{h}(b) = \int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-ibx} dx$

Où a $\hat{h}(b) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-(a+ib)x} f(x) dx$ et $\hat{k}(b) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ibx} e^{-a(x+v)} g(x+v) dx = e^{-ibv} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-(a+ib)x} g(x) dx$

$=: F(a+ib)$ $=: G(a+ib)$

Alors $\boxed{\int_{\mathbb{R}} F(a+ib) \overline{G(a+ib)} e^{-ibv} db = 2\pi \int_{\mathbb{R}^+} f(x) \overline{g(x+v)} e^{-a(x+v)} dx}$

Calcul de $\sigma_{v,w}(u_\lambda)$: Si $\text{Re } \lambda > 0$, alors $u_\lambda \in L^1(N)$ et

$$\sigma_{v,w}(u_\lambda) = \frac{2^r \Gamma(\frac{2p+q+1}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda+r}{2}) \Gamma(\frac{\lambda+p+1}{2})} v^\lambda L(v, \lambda, d) \quad \text{pour } v > 0, w \in S_2 \text{ et } \begin{cases} \text{homogène} \\ \text{de degré } d \end{cases}$$

où $L(a, b, c) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-a(x+v)} x^{b-1} (x+v)^{-c} dx$. Cette formule vaut encore pour $\text{Re } \lambda > -\frac{r}{2}$

→ Comme $\lambda \mapsto u_\lambda$ est analytique, il suffit de prouver cette formule pour $\lambda > 0$.

→ Comme $\lambda \mapsto u_\lambda$ est analytique, cette formule sera encore valable pour $\text{Re } \lambda > -\frac{r}{2}$

→ Posons $\beta = \frac{\lambda+p+1}{2}$, $\gamma = \frac{\lambda+r}{2}$, $f(x) = g(x) = \begin{cases} x^{\beta-1} e^{-\gamma x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors $F(a+ib) = G(a+ib) = (1+a+ib)^{-\beta}$

Calculons maintenant

$$\oint_{\mathbb{R}^2} u_{\lambda}(v, z) \sigma_{\nu, \omega}(v, z) \zeta dv dz = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u_{\lambda}(v, t\omega + z') dt dz dv = \pi^{\frac{q-1}{2}} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\sigma)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u_{\lambda-q+1}(v, t\omega) \sigma_{\nu, \omega}(v, t\omega) \zeta dv dt$$

$$= \pi^{\frac{q-1}{2}} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\sigma)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(|v|^2 + t^2) G(|v|^2 + t^2) e^{-\nu t} dt \sigma_{\nu, \omega}(v, 0) \zeta dv$$

$$= 2\pi^{\frac{q+1}{2}} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\sigma)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x+\nu)} e^{-|v|^2(x+\nu)} \zeta \sigma_{\nu, \omega}(v, 0) \zeta dv$$

$$\text{Or } \int_{\mathbb{R}} e^{-|v|^2(x+\nu)} \sigma_{\nu, \omega}(v, 0) \zeta = \sigma_{\nu, \omega}(\phi_{2x+\nu}) \zeta = \pi^p (\lambda)^d (\lambda+2\nu)^{-d-p} \zeta$$

$$= 2\pi^{\frac{q+1}{2}} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\sigma)} \int_{\mathbb{R}^+} \Gamma(\beta)^{-2} x^{\beta-1} e^{-x} (x+\nu)^{\beta-1-x-\nu} \pi^p (\lambda)^d (\lambda+2\nu)^{-d-p} \zeta dx$$

(7)

$$= \frac{2^{1-p} \pi^{\frac{2p+q+1}{2}}}{\Gamma(\beta) \Gamma(\sigma)} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-x(x+\nu)} x^{\beta+d-1} (x+\nu)^{\beta-d-p-1} dx \zeta$$

$$\int_{\mathbb{R}^+} e^{-\nu(u'+1)} x'^{\beta+d-1} \nu^{\beta+d-1} (u'+1)^{\beta-d-p-1} \nu^{\beta-d-p-1} \nu dx' \zeta$$

$$= \nu^{\frac{2\beta-p-1}{2}} L(\nu, \beta+d, -\beta+d+p+1)$$

Donc $\sigma_{\nu, \omega}(u_{\lambda}) \zeta = \mathcal{L}(p, q)^{-1} \textcircled{1} = \frac{\Gamma(\frac{2p+q+1}{2})}{\pi^{\frac{2p+q+1}{2}} 2^{1-p} \pi^{\frac{2p+q+1}{2}}} \nu^{\lambda} L(\nu, \beta+d, -\beta+d+p+1) \zeta$

$$= \frac{2^p \Gamma(\frac{2p+q+1}{2})}{\Gamma(\beta) \Gamma(\sigma)} \nu^{\lambda} L(\nu, \frac{\beta+d+\lambda+p+1}{2}, \frac{-\lambda-p+1+d+p+2}{2})$$

Proposition 3.6: une équation fonctionnelle pour L et T

- ① si $a, b > \frac{1}{2}$, $\mu > 0$, $\frac{\mu^a}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} \frac{t^{a-1} e^{-\mu t}}{(1+t)^b} dt = \frac{\mu^b}{\Gamma(b)} \int_0^{\infty} \frac{s^{b-1} e^{-\mu s}}{(1+s)^a} ds$.
- ② Ceci reste vrai pour $a, b \in \mathbb{C}$. Ainsi $\frac{(2\nu)^a}{\Gamma(a)} L(\nu, a, b) = \frac{(2\nu)^b}{\Gamma(b)} L(\nu, b, a)$ pour $a, b \in \mathbb{C}$.
- ③ $(\frac{\nu}{2})^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{-\lambda+p+1}{2}) \Gamma(\frac{-\lambda+r}{2})}{\Gamma(\frac{2d-\lambda+p+1}{2})} T(\nu, -\lambda, d) = (\frac{\nu}{2})^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+p+1}{2}) \Gamma(\frac{\lambda+r}{2})}{\Gamma(\frac{2d+\lambda+p+1}{2})} T(\nu, \lambda, d)$ pour $\nu > 0$, $d > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

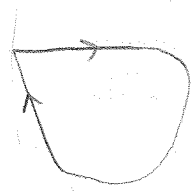
Dém: ① Soit $a, b > \frac{1}{2}$, $\mu > 0$, $f(t) = \begin{cases} s^{a-1} e^{-(t+i)\mu s} / \Gamma(a) & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g(s) = \begin{cases} t^{b-1} e^{-t} / \Gamma(b) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{((t+i)\mu + it)^a} \quad \hat{g}(s) = (1+is)^{-b}$$

puisque $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$.

Alors $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s) \hat{g}(s) ds = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) g(t) dt$ (Plancherel): $\int_0^{\infty} \frac{s^{a-1} e^{-(t+i)\mu s}}{\Gamma(a) (1+is)^b} ds = \int_0^{\infty} \frac{t^{b-1} e^{-t}}{\Gamma(b) ((t+i)\mu + it)^a} dt$

Posons $s = \frac{t}{\varepsilon + i}$ dans la première intégrale et $t = \mu s$ dans la seconde:



$$\int_0^{\infty} \frac{(\varepsilon + i)^{-a+1-\lambda} t^{a-1} e^{-\mu t}}{\Gamma(a) (1 + \frac{it}{\varepsilon + i})^b} dt = \int_0^{\infty} \frac{\mu^{b-1+\lambda+b-1} s^{b-1} e^{-\mu s}}{\Gamma(b) ((\varepsilon + i) + it)^a} ds$$

$$\frac{(\varepsilon + i)^{-a}}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} \frac{t^{a-1} e^{-\mu t}}{(1 + \frac{it}{\varepsilon + i})^b} dt = \frac{(\varepsilon + i)^{-a}}{\Gamma(b)} \int_0^{\infty} \frac{s^{b-1} e^{-\mu s}}{(1 + \frac{it}{\varepsilon + i})^a} ds$$

- ② Découpons l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \dots$ en 2: $\int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty}$. Alors $\frac{\mu^a}{\Gamma(a)} \int_{-\infty}^0 \dots$ se prolonge à $\mathbb{C}$. Écrivons $\frac{t^{a-1}}{(1+t)^b} e^{-\mu t} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(b) t^{a+n-1}$. Alors $\int_{-\infty}^0 \dots$ est une fonction méromorphe de a avec des pôles simples en $0, -1, -2, \dots$ qui sont compensés par des pôles simples de $\Gamma(a)$.

Proposition 3.7. Soit $\nu > 0$ et $d \geq 0$. La fonction $\lambda \mapsto T(\nu, \lambda, d)$ est entière.

Si $\lambda = \beta + i\gamma$ avec $\beta \in [0, r[$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, alors

$$\left(\int_{\mathbb{R}^+} |\nu^{-\frac{\lambda}{2}} T(\nu, \lambda, d)|^2 \nu^{r-1} d\nu \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(p, q) (r-\beta)^{-\frac{1}{2}} e^{|\gamma|}$$

$$\lim_{\beta \uparrow r} \sqrt{r-\beta} \left(\int_0^\infty |\nu^{-\frac{\beta}{2}} T(\nu, \beta, d)|^2 \nu^{r-1} d\nu \right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Dém : • $T(\nu, \lambda, d)$ est holomorphe sur $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > -p-1\}$ (voir sa définition)
 L'eq. fonctionnelle de T montre que T l'est aussi sur $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < p+1\}$. Takentière

• Estimons T de deux manières :

1) Nous avons vu que $T(\nu, \lambda, d) = \frac{2^r \Gamma(\frac{2d+p+1}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda+p+1}{2}) \Gamma(\frac{\lambda+r}{2})} \int_0^\infty \frac{e^{-2u-\nu} u^{\frac{2d+\lambda+p-1}{2}}}{(u+\nu)^{\frac{2d-\lambda+p+1}{2}}} du$
 (formule t page 9)

Or $u^{\frac{2d+p}{2}} \leq (u+\nu)^{\frac{2d+p}{2}}$: $|T(\nu, \lambda, d)| \leq |Q(\lambda)| \int_0^\infty \frac{e^{-2u-\nu} u^{\frac{\beta-1}{2}}}{(u+\nu)^{\frac{-\beta+1}{2}}} du$

Si $0 \leq \beta \leq 1$, $(u+\nu)^{\frac{\beta-1}{2}} \leq \nu^{\frac{\beta-1}{2}}$ et $|T(\nu, \lambda, d)| \leq |Q(\lambda)| \nu^{\frac{\beta-1}{2}} e^{-\nu} \int_0^\infty e^{-2u} u^{\frac{\beta-1}{2}} du$

$$= \frac{\Gamma(\frac{\beta+1}{2})}{2^{\frac{\beta+1}{2}}}$$

• $|T(\nu, \lambda, d)| \leq C(p, q) \nu^{\frac{\beta-1}{2}} e^{-\nu} \frac{\Gamma(\frac{\beta+1}{2})}{|\Gamma(\frac{\lambda+p+1}{2}) \Gamma(\frac{\lambda+r}{2})|}$

$$\leq \frac{(\frac{\beta+1}{2})^{\frac{\beta}{2}}}{\left| \left(\frac{\lambda+p+1}{2} \right)^{\frac{\lambda+p-1}{2}} \left(\frac{\lambda+r}{2} \right)^{\frac{\lambda+r-1}{2}} \right|}$$

Or $\frac{\lambda+p+1}{2} = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \geq 0$, $\frac{\lambda+p+1}{2} = \frac{\beta+p+1}{2}$ et donc $\left| \left(\frac{\lambda+p+1}{2} \right)^{\frac{\lambda+p-1}{2}} \right| = \rho^{\frac{\beta+p}{2}} e^{-\frac{\theta}{2} \gamma} \gg \left(\frac{\beta+p+1}{2} \right)^{\frac{\beta+p}{2}} e^{-\frac{\pi}{4} |\gamma|}$
 De même $\left| \left(\frac{\lambda+r}{2} \right)^{\frac{\lambda+r-1}{2}} \right| \gg \left(\frac{\beta+r}{2} \right)^{\frac{\beta+r-1}{2}} e^{-\frac{\pi}{4} |\gamma|}$

Donc $|T(\nu, \lambda, d)| \leq C(p, q) \nu^{\frac{\beta-1}{2}} e^{-\nu} e^{+\frac{\pi}{2} |\gamma|}$

Si $1 \leq \beta \leq r$, $(u+\nu)^{\frac{\beta-1}{2}} \leq ((u+1)(\nu+1))^{\frac{\beta-1}{2}}$ et donc
 $|T(\nu, \lambda, d)| \leq |Q(\lambda)| (\nu+1)^{\frac{\beta-1}{2}} e^{-\nu} \int_0^\infty e^{-2u} (u(u+1))^{\frac{\beta-1}{2}} du$

$$\leq C(p, q) (\nu+1)^{\frac{\beta-1}{2}} e^{-\nu} \frac{2^{-\beta} \beta^{\beta-1}}{\left(\frac{\beta+p+1}{2} \right)^{\frac{\beta+p}{2}} \left(\frac{\beta+r}{2} \right)^{\frac{\beta+r-1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2} |\gamma|}}$$

$$\leq \frac{e^{\frac{\pi}{2} |\gamma|}}{e^{\frac{\pi}{2} |\gamma|}} = e^{\frac{\pi}{2} |\gamma|}$$

Donc, si $0 \leq \beta \leq 1$, $\left(\int_{\mathbb{R}^+} |\nu^{-\frac{\lambda}{2}} T(\nu, \lambda, d)|^2 \nu^{r-1} d\nu \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(p, q) \left(\int_0^\infty \nu^{r-2} e^{-2\nu} e^{\frac{\pi}{2} |\gamma|} d\nu \right)^{\frac{1}{2}} = C(p, q) e^{\frac{\pi}{2} |\gamma|} \left(\int_0^\infty \nu^{r-2} e^{-2\nu} d\nu \right)^{\frac{1}{2}}$

$$= C(p, q) e^{\frac{\pi}{2} |\gamma|} 2^{1-r} \Gamma(r-1)$$

si $1 \leq \beta \leq r$,
$$\leq C(p, q) e^{\frac{\pi}{2} |\gamma|} \int_0^\infty \nu^{r-\beta-1} (\nu+1)^{\beta-1} e^{-2\nu} d\nu$$

 ou 0, $\sim \nu^{r-\beta-1} e^{-2\nu}$
 ou ∞ , $\sim \nu^{r-2} e^{-2\nu}$

$$\leq C(p, q) e^{\frac{\pi}{2} |\gamma|} \left(\frac{\Gamma(r-\beta)}{2^{\frac{\beta}{2}}} + 2^{1-r} \Gamma(r-1) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Or Γ a un pôle simple en 0. Donc

$$\leq \left[C(p, q) e^{\frac{\pi}{2} |\gamma|} (r-\beta)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

• Montrons que $|T(v, \lambda, d)| \leq C(p, q) \beta^{-1}$ pour $\beta > 0$

où $\sigma_{v,w}(u, \lambda) \xi = T(v, \lambda, d) \xi$ n'est d-homogène et donc

$$|T(v, \lambda, d)| \leq \|v\|_1 = \frac{1}{h(p, q)} \int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{R}^q} ((1+|v|^2)^2 + |z|^2)^{-\frac{\beta+r}{2}} dz dv$$

$$= \frac{1}{h(p, q)} \frac{2\pi^p}{\Gamma(p)} \frac{2\pi^{q/2}}{\Gamma(\frac{q}{2})} \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} \int_{\mathbb{S}^{q-1}} ((1+s^2)^2 + t^2)^{-\frac{\beta+r}{2}} t^{q-1} dt ds^{p-1} ds$$

$$(t = (1+s^2)u)$$

$$(w = s^2, v = u^2)$$

$$= \frac{1}{h(p, q)} \frac{2\pi^{p+q/2}}{\Gamma(p) \Gamma(\frac{q}{2})} \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} \int_{\mathbb{S}^{q-1}} (1+s^2)^{-\beta-r} (1+u^2)^{-\frac{\beta+r}{2}} u^{q-1} du ds^{p-1} ds$$

$$= \frac{\pi^{p+q/2}}{h(p, q) \Gamma(p) \Gamma(\frac{q}{2})} \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{S}^{p-1}} \int_{\mathbb{S}^{q-1}} (1+w)^{-\beta-p} (1+v)^{-\frac{\beta+r}{2}} v^{\frac{q}{2}-1} dv w^{p-1} dw$$

$$= \frac{\pi^{p+q/2} \Gamma(\frac{2p+q+1}{2}) \Gamma(p) \Gamma(\frac{q}{2}) \Gamma(\frac{\beta+p}{2}) \Gamma(\frac{\beta+r}{2})}{\pi^{\frac{2p+q+1}{2}} 2^{1-2p-q} \Gamma(p) \Gamma(\frac{q}{2}) \Gamma(\beta+p) \Gamma(\frac{\beta+r}{2})}$$

$$(2\sqrt{\pi} \Gamma(\beta+p) = 2^{\beta+p} \Gamma(\frac{\beta+p}{2}) \Gamma(\frac{\beta+p+1}{2})) = \frac{2 \Gamma(\frac{2p+q+1}{2}) \Gamma(\beta)}{2^{1-p+\beta-q} \Gamma(\frac{\beta+r}{2}) \Gamma(\frac{\beta+p+1}{2})}$$

et donc $|T(v, \lambda, d)| \leq C(p, q) \Gamma(\beta) \leq C(p, q) \beta^{-1}$.

• Estimons $|T(v, \lambda, d) - T(v, r, d)| = \left| \int_{[\lambda, r]} \frac{\partial T(v, \mu, d)}{\partial \mu} d\mu \right|$

$$\leq |\lambda - r| \sup_{\mu \in [\lambda, r]} \left| \frac{\partial T(v, \mu, d)}{\partial \mu} \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(\mu, \frac{\beta}{2})} T(v, \zeta, d) (\zeta - \mu)^2 d\zeta$$

$$\leq |\lambda - r| \frac{2}{\beta} \sup_{\zeta \in \mathcal{C}(\mu, \frac{\beta}{2})} |T(v, \zeta, d)|$$

Or $\zeta \in \mathcal{C}(\mu, \frac{\beta}{2}) \Rightarrow \Re \zeta \geq \frac{\beta}{2}$. Donc $\leq |\lambda - r| \frac{2}{\beta} C(p, q) \frac{2}{\beta}$ par ce qui précède.

$$\leq C(p, q) \frac{|\lambda - r|}{\beta^2}$$

• Calculons $\lim_{v \rightarrow 0^+} T(v, r, d)$: $T(v, r, d) = \frac{2^r \Gamma(\frac{2p+q+1}{2})}{\Gamma(\frac{r+p+q+1}{2}) \Gamma(r)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2x-v} x^{\frac{2d+2p+q-1}{2}}}{(x+v)^{\frac{2d+q+1}{2}}} du$

Où, si $v \in]0, 1[$, l'intégrande est dominée par $e^{-2x} x^{\frac{2p+q-1}{2}} (\frac{q-1}{2\pi i})^2$ qui est intégrable et donc, par convergence dominée,

$$\lim_{v \rightarrow 0^+} T(v, v, d) = \frac{2^r}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} e^{-2x} x^{\frac{2p+q-1}{2}} = 1$$

• Montrons la 2^e assertion: $\forall \eta > 0, (r-\beta) \int_0^{\infty} |v^{-\frac{\beta}{2}} T(v, \beta, d)|^2 v^{r-1} dv \rightarrow 0$

$$2/ (r-\beta) \int_0^{\infty} |v^{-\frac{\beta}{2}} [T(v, \beta, d) - T(v, r, d)]|^2 v^{r-1} dv \leq \frac{1}{(r-\beta)} \int_0^{\infty} v^{-\beta} (\beta-r)^2 \frac{2^{r-1}}{\beta} v^{\frac{2p+q-1}{2}} dv = C(p, q) (r-\beta)^2 \beta^{-2} \delta^{r-\beta} \xrightarrow{\beta \rightarrow r} 0$$

$$3/ \lim_{\beta \rightarrow r} (r-\beta) \int_0^{\infty} |v^{-\beta/2} (T(v, r, d) - 1)|^2 v^{r-1} dv \leq \sup_{\alpha \leq \beta \leq d} |T(v, r, d) - 1|^2 \lim_{\beta \rightarrow r} (r-\beta) \frac{\delta^{r-\beta}}{r-\beta} = \sup_{0 < \alpha \leq \beta \leq d} |T(v, r, d) - 1|^2 \rightarrow 0$$

$$4/ \lim_{\beta \rightarrow r} (r-\beta) \int_0^{\infty} |v^{-\frac{\beta}{2}}| v^{r-1} dv = 1.$$