

Théorème principal: Si $G = Sp(n, 1)$, $\Lambda_G \geq 2n-1$ et si $G = F_4(-10)$, $\Lambda_G \geq 21$.

On travaille avec $M = \mathbb{H} \oplus \mathbb{Q}$ algèbre de Lie de N (de type H)

Def: on note $\Delta_{\mathcal{Q}} : C_c^\infty(N) \rightarrow C_c^\infty(N)$, $\Delta_{\mathcal{Q}} u(v, z) = - \sum_{k=1}^q \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(v, z + t w_k) \Big|_{t=0}$
 $e^{\frac{v+z}{2}}$ où $w_1, \dots, w_q$ b.o.u de $\mathcal{Q}$.

Prop 5.1: Si u, v sont $C_c^\infty(N)$, $\left| \int_{\mathbb{R}^p} (\Delta_{\mathcal{Q}}^{p/2} u)(v, 0) dv \right| \leq \pi^p \|u\|_{B(N)}$ pour u pair.

(Rappel: $u \in B(N)$ si $\exists \pi$ rep. unitaire de N sur $\mathcal{H}$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, tel que $u(x) = \langle \pi(x) \xi, \eta \rangle$)

$$\|u\|_{B(N)} = \inf_{\pi, \xi, \eta} \|\xi\| \|\eta\| = \|u\|_{C^*(N)^+} \quad \text{où} \quad \langle u, f \rangle = \int_N u f d\mu$$

preuve: par la formule de Plancherel, $\|u\|_{B(N)} = \sup_{\substack{f \in L^1(N) \\ \|\pi(f)\| \leq 1 \text{ pour toute rep. unitaire de } N}} \int_N f u = \sup_{\substack{f \in L^1(N) \\ \|\sigma_{v,w}(f)\| \leq 1 \text{ pour } v > 0 \text{ et } w \in \mathcal{Q}}} \int_N f u$

et si $u \in C_c^\infty(N)$, $\|u\|_{B(N)} = \sup_{\substack{h \text{ distrib. tempérée} \\ \|\sigma_{v,w}(h)\| \leq 1 \text{ pour tous } v, w}} \langle h, u \rangle$

Rappel: Si h distribution tempérée sur N , $\pi = \sigma_{v,w}$, $\pi(h)$ est un op. non borné sur $\mathcal{H}_\pi$
 tel que $\langle \pi(h) \xi, \eta \rangle = \langle h, \varphi_{\xi, \eta} \rangle$ où $\varphi_{\xi, \eta}(x) = \langle \pi(x) \xi, \eta \rangle$.

On va prendre la distribution $\langle h, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^p} \Delta_{\mathcal{Q}} u(v, 0) dv$.

Il s'agit de montrer $\|\sigma_{v,w}(h)\| \leq \pi^p$ pour tous v, w . En fait, il suffit de montrer

pour $h = h_R$ donnée par $\langle h_R, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^p} e^{-R|w|^2} \Delta_{\mathcal{Q}} u(v, 0) dv = \langle \phi_R, \Delta_{\mathcal{Q}} u \rangle$

On calcule $\langle \sigma_{v,w}(h_R) \xi, \eta \rangle$ avec ξ, η des monômes.

$$\langle h_R, \varphi_{\xi, \eta} \rangle \quad \text{où} \quad \varphi_{\xi, \eta}(v, z) = \langle \sigma_{v,w}(v, z) \xi, \eta \rangle = \int e^{-v(|w|^2 + 2\{v, w\}w + i\langle z, w \rangle)} \xi(v+w) \overline{\eta(w)} d\mu(w)$$

Alors $\Delta_{\mathcal{Q}} \varphi_{\xi, \eta}(v, 0) = \sum_{k=1}^q v^2 \langle w, w_k \rangle^2 \times \varphi_{\xi, \eta}(v, 0)$

$$\Delta_{\mathcal{Q}}^{p/2} \varphi_{\xi, \eta}(v, 0) = v^p \langle \phi_R, \varphi_{\xi, \eta} \rangle = v^p \langle \sigma_{v,w}(\phi_R) \xi, \eta \rangle$$

lespace propre poly homde deg d
 de v. propre associée $\pi(R-v)^d (R+v)^{d-p}$
 $\frac{(R-v)^{d-p}}{v^p}$

D'où $\|\sigma_{v,w}(h_R)\| \leq \pi^p$ $\odot$

Proposition 5.2 : Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et on pose $u(v, z) = f(4|v|^2(|v|^4 + |z|^2))$

$$\text{Alors } \int_{\mathbb{R}^p} \Delta_z^{\frac{p}{2}} u(v, 0) dv = \frac{(-1)^{p/2} 2^{p+1} \pi^p}{\Gamma(p) \Gamma(\frac{p}{2})} \Gamma(\frac{p}{2}) \int_0^\infty f(\frac{r^2}{2}) (4t^2 t^4) t^{2p-1} dt$$

preuve : on pose $v = 4|v|^2(|v|^4 + |z|^2)$ et $H \geq 0$

$$u(v, z) = \sum_{k=0}^H \frac{f^{(k)}(1)}{k!} |z|^{2k} + \frac{1}{H!} \int_0^{|z|^2} f^{(H+1)}(s) (s+1) (|z|^2 + s)^H ds$$

$$\text{Si } t \text{ est assez grand, } \Delta_z^{\frac{p}{2}} u(v, 0) = \sum_{k=0}^H \frac{f^{(k)}(1)}{k!} \Delta_z^{\frac{p}{2}} (|z|^{2k}) \stackrel{\text{multiplier } 2k=p}{=} (-1)^{\frac{p}{2}} 2^p f^{(\frac{p}{2})}(1) \frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})}$$

Proposition 5.3 : Soit $f_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ telles que $\|f_i\|_\infty \leq L$

$$\text{Alors } \int_0^\infty f_i(\frac{r^2}{2}) (4t^2 t^4) t^{2p-1} dt \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{\frac{p}{2}} \Gamma(\frac{p}{2})}{4} \quad f_i \rightarrow 1 \text{ simplement,}$$

On en déduit le Théorème principal :

Soit $G = Sp(n, 1)$, Iwasawa donne $G = KAN$ avec N de type H avec $q=3$ et $p=2n-2$

Si $G = Fu(2, 0)$ $q=7$ et $p=4$

Supposons qu'il existe $u_i \in C_c^\infty(G)$ tels que $\|u_i\|_{M_0 A(G)} \leq \Lambda_G$
 $u_i \rightarrow 1$ uniformément sur les compacts.

Etapes : on peut supposer $u_i(hg h') = u_i(g)$ pour $h, h' \in K$ et $g \in G$
 (on considère $g \mapsto \int_{K \times K} u_i(hg h') dh dh'$)

On voit qu'il existe $f_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ tels que $u_i(v, z) = f_i(4|v|^2(|v|^4 + |z|^2))$

$$\text{Et de plus } \|u_i|_N\|_{B(N)} \leq \|u_i|_N\|_{M_0 A(N)} \leq \|u_i\|_{M_0 A(G)} \leq \Lambda_G$$

Par les propositions 5.1, 5.2 et 5.3, $\frac{(-1)^{p/2} 2^{p+1} \pi^p}{\Gamma(p) \Gamma(\frac{p}{2})} \frac{(-1)^{p/2} \Gamma(\frac{p}{2})}{4} \leq \Lambda_G$

Utilisons la formule de Legendre pour Γ :

preuve de la prop 5.3 : $\frac{p}{2}$ I.D.P.