

Hagerup - de Laub

Théorème 1 Soit G un g.l.c. LASSE

- (a) Il existe (u_α) dans $A_c(G)$ telle que $u_\alpha \xrightarrow{\| \cdot \|_{M_0 A(G)}, Q(G)} 1$, où $Q(G)$ est le produit de $M_0 A(G)$.
- (b) $M_{u_\alpha} \rightarrow id_{VN(G)}$ pour la topologie (point- w^*)-stable, i.e. $\forall a \in VN(G) \otimes B(H) \quad M_{u_\alpha} \otimes id(a) \xrightarrow{w^*} a$
- (c) $\overline{M}_{u_\alpha} \rightarrow id_{C_r^*(G)}$ pour la topologie (point-norm)-stable, i.e. $\forall a \in C_r^*(G) \otimes K(H) \quad \overline{M}_{u_\alpha} \otimes id(a) \rightarrow a$.

Si de plus G est discret, CASE 2

- (d) $\forall a \in C_r^*(G) \otimes B(H)$

Remarque : $A_c(G)$ est l'ensemble des éléments à support compact.

$Q(G)$ peut être obtenu en complétant $L^1(G)$ pour la norme

$$\|f\|_Q = \sup \left\{ \left| \int_G f(x) u(x) dx \right| : \|u\|_{M_0 A(G)} \leq 1 \right\}$$

$M_u = m_u^*$ où $m_u(v) = uv$ pour $v \in A(G)$, et $\overline{M}_u = M_u|_{C_r^*(G)}$.

Pour démontrer ces théorèmes, supposons que A, B, C soient des C^* -algèbres.

Alors pour $a \in A \otimes C$ et $\varphi \in (B \otimes C)^*$ ou $(M \otimes R)_*$ [$B \subset M, C \subset R$]

$$(*) \quad \omega_{a,\varphi}(T) = \langle T \otimes id_C(a), \varphi \rangle \text{ pour } T \in CB(A, B)$$

Supposons M, N, R algèbres de von Neumann : si $a \in M \otimes R$ et $\varphi \in (N \otimes R)_*$,

$$\omega_{a,\varphi}(T) = \langle T \otimes id_R(a), \varphi \rangle \text{ pour } T \in CB_\sigma(M, N).$$

On pose $\|\omega_{a,\varphi}\| \leq \|a\| \|\varphi\|$. Si $u \in M_0 A(G)$, on définit $\omega_{a,\varphi}(u) = \begin{cases} \omega_{a,\varphi}(\overline{M}_u) & \text{si } \varphi \in C_r^*(G) \otimes B(H) \\ \omega_{a,\varphi}(M_u) & \text{si } \varphi \in C_r^*(G) \otimes K(H) \end{cases}$

Pour $PA_c(A) = \{ f \in A_c(A) : f \geq 0 \text{ et } \int f = 1 \}$. On a alors $\|f \otimes u\|_{H \otimes A(A)} \leq \|u\|_{H \otimes A(A)}$.

Donc si $f \in PA_c(A)$ on a $w_{a, f \otimes 1}(u) = w_{a, f}(f \otimes u)$ et $\|w_{a, f \otimes 1}\| \leq \|a\| \|f\|$.

- Proposition 1 :
- ① $w_{a, f \otimes 1} \in Q(A)$ si $a \in VN(A) \otimes B(H)$, $f \in (VN(A) \otimes B(H))^*$
(pas besoin de f et $f \in PA_c(A)$ dans le cas d'isnet)
 - ② $\underline{\hspace{10em}}$ si $a \in C_r^*(A) \otimes K(H)$, $f \in (C_r^*(A) \otimes K(H))^*$
et $f \in PA_c(A)$
(on peut remplacer $K(H)$ par $B(H)$ si A est d'isnet)
 - ③ $w_{a, f} \in Q(A)$ si $a \in C_r^*(A) \otimes K(H)$ et $f \in (VN(A) \otimes B(H))^*$.

Proposition 2 : Si $w \in Q(A)$, alors $\exists a \in C_r^*(A) \otimes K(H) \exists f \in (VN(A) \otimes B(H))^* w = w_{a, f}$.

Démonstration du théorème : a $\Rightarrow$ b : Soit (v_α) dans $A_c(A)$ $v_\alpha \xrightarrow{\| \cdot \|_{A_c(A) \otimes Q(A)}} 1$. Posons $u_\alpha = f \otimes v_\alpha$ avec $f \in PA_c(A)$. Montrons que $M u_\alpha \rightarrow id_{VN(A)}$.

Soit $a \in VN(A) \otimes B(H)$: par la prop 1 a, si $f \in (VN(A) \otimes B(H))^*$,
 $\langle M u_\alpha \otimes id_{B(H)}(a), f \rangle = w_{a, f \otimes 1}(v_\alpha) \rightarrow w_{a, f \otimes 1}(1) = w_{a, f}(f \otimes 1) = w_{a, f}(1) = \langle a, f \rangle$.

a $\Rightarrow$ c : Soit $a \in C_r^*(A) \otimes K(H)$ et $f \in (C_r^*(A) \otimes K(H))^*$. Par la proposition 1(b),
 $\langle M u_\alpha \otimes id_{K(H)}(a), f \rangle = w_{a, f \otimes 1}(a) \rightarrow \langle a, f \rangle$.
Donc $id_{C_r^*(A)} \in \overline{\{ M u : u \in A_c(A) \}}^z$
Or cet ensemble est convexe, donc cette clôture est prise pour la topologie (point-norm)-stable.
La topologie (point-norm)-stable.

b $\Rightarrow$ a : Il existe $(u_\alpha) \in A_c(A)$ telle que $M u_\alpha \rightarrow id_{VN(A)}$ au sens « stable point w^* »
et $\langle M u_\alpha \otimes id_{B(H)}(a), f \rangle \rightarrow \langle a, f \rangle$ pour $a \in VN(A) \otimes B(H)$
et $f \in (VN(A) \otimes B(H))^*$.

Donc $\underline{\hspace{10em}}$ pour $a \in C_r^*(A) \otimes K(H)$
et $f \in (VN(A) \otimes B(H))^*$.

Par la proposition 2, $w_{a, f} \rightarrow w_{a, f}(1)$ pour $\underline{\hspace{10em}}$

Pour remonter c $\Rightarrow$ a, on considère dans le raisonnement précédent $\left\{ \begin{array}{l} a \in C_r^*(A) \otimes K(H) \\ f \in (C_r^*(A) \otimes K(H))^* \end{array} \right.$
d $\Rightarrow$ a $\underline{\hspace{10em}}$ $\left\{ \begin{array}{l} a \in C_r^*(A) \otimes B(H) \\ f \in (C_r^*(A) \otimes B(H))^* \end{array} \right.$

Dem. de la proposition 1 : [a] $(VN(A) \otimes B(H))_* = \{ \varphi_1 \otimes \varphi_2 : \varphi_1 \in A_*(A) \text{ et } \varphi_2 \in B(H)_* \}$ (3)

et comme $\| \omega_{a, \varphi, f} \| \leq \| a \| \| \varphi \|$, $\omega_{a, \varphi, f} \longleftarrow \omega_{a, \sum \varphi_i^* \otimes \varphi_i, f}$

Supposons $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$ et soit $u \in M_0 A(A)$. $\omega_{a, \varphi, f}(u) = \langle M_{f \otimes u} \otimes id_{B(H)}(a), \varphi \rangle$
 $= \langle a, (f \otimes u) \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle$
 $= \langle \langle a, \varphi_2 \rangle, (f \otimes u) \varphi_1 \rangle$
 $= \langle \langle a, \varphi_2 \rangle, \underbrace{f \otimes u}_{\in VN(A)} \varphi_1 \rangle$

On peut supposer $a \in VN(A)$, $\varphi \in A_c(A)$ et $f \in PA_c(A)$

Il faut trouver $h(u) \in L^1(A)$ telle que $\omega_{a, \varphi, f}(u) = \int \varphi(u) h(u) d\mu$ pour $u \in M_0 A(A)$.

Soit $S = \text{supp}(f)^{-1} \text{supp}(\varphi)$ et $u \in M_0 A(A)$. Alors

$$\begin{aligned} [(f \otimes u) \varphi](u) &= [(f \otimes 1_S u) \varphi](u) \quad \text{car } \text{supp } f \otimes u \subset \text{supp } \varphi \\ &\quad \text{supp } f \cdot \text{supp } u \subset \text{supp } \varphi \\ &\quad \text{supp } u \subset (\text{supp } f)^{-1} \text{supp } \varphi \\ &= \int_A f(xy) (1_S u)(y^{-1}) dy \varphi(u) \\ &= \int_A f_y(u) \varphi(u) (1_S)(y^{-1}) dy \end{aligned}$$

Posons $\phi : \begin{matrix} A & \longrightarrow & A(A) \\ y & \longmapsto & f_y(u) \varphi(u) \end{matrix}$ et $d\mu(y) = 1_S(u)(y^{-1}) dy$.

Alors $\| \phi(y) \|_{A(A)} = \| f_y \varphi \|_{A(A)} \leq \| f_y \|_{A(A)} \| \varphi \|_{A(A)}$ car ϕ est borné et continu ($\leq$ de Young).
 $\| d\mu \| \leq \| u \|_\infty |S| < \infty$.

Donc $v = \int \phi(y) d\mu(y) \in A(A)$ et est telle que $\langle b, v \rangle = \int_A \langle b, \phi(y) \rangle d\mu(y)$

Or $\omega_{a, \varphi, f}(u) = \langle a, (f \otimes u) \varphi \rangle = \langle a, v \rangle = \int_A \langle a, \phi(y) \rangle d\mu(y)$ pour $b \in VN(A)$.

$$= \int_A u(y^{-1}) \langle a, \phi(y) \rangle 1_S(y^{-1}) dy = \int_A u(y) h(y) dy.$$

où $h(y) = \langle a, \phi(y^{-1}) \rangle 1_S(y) \Delta(y^{-1})$ et $\int |h| dy = \int_A |\langle a, \phi(y) \rangle| 1_S(y^{-1}) dy$

[c] $\| \omega_{a, \varphi} \| \leq \| a \| \| \varphi \|$ et donc on peut supposer $a = \lambda(f) \otimes b$ avec $f \in L^1(A)$ et $b \in K(H)$
 $\varphi = v \otimes \psi$ avec $v \in A(A)$ et $\psi \in B(H)_*$.

$$\omega_{a, \varphi}(u) = \langle M_u(\lambda(f)), v \rangle \langle b, \psi \rangle = \langle \lambda(uf), v \rangle \langle b, \psi \rangle = \int u(n) h(n) d\mu.$$

avec $h(n) = f(n) v(n) \langle b, \psi \rangle \in L^1(A)$.

[d] Fixons une base de H : $C_r^*(A) \otimes K(H) \sim M_\infty(C_r^*(A)) \supset \bigcup_n M_n(C_r^*(A))$

On n'a besoin de considérer que $a \in M_n(C_r^*(A))$ et $\varphi \in M_n(C_r^*(A))^*$ et

$$\omega_{a, \varphi}(u) = \sum_{i,j} \langle M_{f \otimes u}(a_{ij}), \varphi_{ij} \rangle \text{ et donc une somme de } n^2 \text{ termes de la forme}$$

$$\omega_{a_{ij}, \varphi_{ij}}(u) = \int u(n) h(n) d\mu.$$

On a en fait $a_{ij} = \lambda(g_{ij})$ avec $g_{ij} \in C_c(G)$ et $\overline{M_u(a_{ij})} = \lambda(ug_{ij})$ et
 $\omega_{a_{ij}, \varphi}(u) = \int_G u(x) g_{ij}(x) \varphi_{ij}(x) dx = \int_G u(x) h_{ij}(x) dx$ avec $h_{ij}(u) = g_{ij}(u) \varphi_{ij}(u)$

Cas discret

(a) : on prend $f = \delta_e$

(b) : $a = \lambda(n) \otimes b$ avec $\lambda \in G$.

$$h(y) = \langle \lambda(y) \otimes b, \varphi \rangle \delta_n(y) \in \ell^1(G)$$

$$\omega_{a, \varphi}(u) = \langle u(n) \lambda(n) \otimes b, \varphi \rangle = \sum_n u(n) \langle \lambda(n) \otimes b, \varphi \rangle = \sum_{y \in G} u(y) |h(y)|$$

Lemme pour la proposition 2 : Soit A une C^* -algèbre et M une algèbre de von Neumann sur H séparable.

Soit $X \subset CB(A, M)$ tel que $X = E^*$ pour un certain T .

Soit $S = \{ \omega_{a, \varphi} : a \in (A \otimes K(H))_1 \text{ et } \varphi \in ((M \otimes B(H))_*)_1 \}$ où $\omega_{a, \varphi}(T) = \langle T \otimes id_{K(H)}(a), \varphi \rangle$

Alors S est convexe ; si $S \subset E$, alors les éléments de E sont de la forme $\omega_{a, \varphi}$ avec $a \in A \otimes K(H)$ et $\varphi \in ((M \otimes B(H))_*)_1$.

Dém de la prop. 2 : $A = C_r^*(G)$ et $M = VN(G)$ et $X = M \circ A(G) \subset CB(A, M)$.

Alors $X = Q(G)^*$ et $S \subset Q(G)$ par la proposition (1c)

Il reste donc à montrer le lemme 1 : Notons $H^{(2)} = H \oplus H$. Donc $M \otimes B(H^{(2)}) \leftrightarrow M_2(M \otimes B(H))$

par l'identification suivante : si $b = (b_{ij}) \in M \otimes B(H^{(2)})$ et $\varphi = (\varphi_{ij}) \in (M \otimes B(H^{(2)}))_*$

$$\langle b, \varphi \rangle = \sum_{i,j} \langle b_{ij}, \varphi_{ij} \rangle \text{ et } A \otimes K(H^{(2)}) \text{ s'identifie aussi à } M_2(A \otimes K(H)) \text{ par}$$

$$T \otimes id_{K(H^{(2)})}(a) = [T \otimes id_{K(H)}(a_{ij})]_{ij}$$

On peut maintenant montrer la convexité : pour ω_{a_1, φ_1} et $\omega_{a_2, \varphi_2} \in S$, $0 < \lambda < 1$:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \in A \otimes K(H^{(2)}) \text{ et } \varphi = \begin{pmatrix} \lambda \varphi_1 & 0 \\ 0 & (1-\lambda) \varphi_2 \end{pmatrix} \in (M \otimes B(H^{(2)}))_*$$

$$\|a\| \leq \max(\|a_1\|, \|a_2\|) \leq 1 \quad \| \varphi \| \leq \lambda \| \varphi_1 \| + (1-\lambda) \| \varphi_2 \|$$

$$\text{Alors } \omega_{a, \varphi}(T) = \langle T \otimes id_{K(H^{(2)})}(a), \varphi \rangle = \langle T \otimes id_{K(H)}(a), \lambda \varphi_1 \rangle + \langle T \otimes id_{K(H)}(a), (1-\lambda) \varphi_2 \rangle = (\lambda \omega_{a_1, \varphi_1} + (1-\lambda) \omega_{a_2, \varphi_2})(T)$$

Or $H \sim H^{(2)}$ et $\omega_{a, \varphi} = \omega_{b, \varphi}$ avec $b \in (A \otimes K(H))_1$ et $\varphi \in ((M \otimes B(H))_*)_1$.

Donc S est convexe.

Claim : Si $S \subset E$, alors S est dense dans E : on suppose $\omega \in E$ tel que $\omega \notin S$ et

$T \in E^* = X$ tel que $|\langle \omega_{a, \varphi}, T \rangle| \leq 1 < \langle \omega, T \rangle$ pour $\omega_{a, \varphi} \in S$

$$NB : \|T\|_{cb} = \sup \{ \|T \otimes id_{K(H)}(a)\| : a \in (A \otimes K(H))_1 \} = \sup \{ |\langle T \otimes id_{K(H)}(a), \varphi \rangle| : \varphi \in ((M \otimes B(H))_*)_1, \| \varphi \| \leq 1 \} \leq 1. \text{ C'est absurde ! sachant que } \|a\| \leq 1.$$

Il reste à montrer que c'est fermé.

On a $H^{(\infty)} \simeq H$ et $w = w_{a,\varphi}$ avec $a \in A \otimes K(H^{(\infty)})$ et $\varphi \in ((\Pi \otimes B(H^{(\infty)}))_*)_1$.

On peut supposer que $w \in E_1$ et $\exists w_1 \in S$ $\|w - w_1\| < \frac{1}{2}$ et $2(w - w_1) \in E_1$.

$\exists w_2 \in S$ $\|2(w - w_1) - w_2\| < \frac{1}{2}$, i.e. $\|w - w_1 - \frac{1}{2}w_2\| < \frac{1}{4}$
 et ... $2^{n-1}(w - \sum_{i=1}^{n-1} 2^{-i+1}w_i) \in E_1$: $\exists w_n \in S$ $\|w - \sum_{i=1}^n 2^{-i+1}w_i\| < 2^{-n}$

Donc $w = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i+1}w_i$. Donc w_i s'écrit $w_i = w_{b_i, \varphi_i}$ avec $\begin{cases} b_i \in (A \otimes K(H))_1 \\ \varphi_i \in ((\Pi \otimes B(H))_*)_1 \end{cases}$
 Posons $\alpha_i = (2^{-i+1})^{\frac{1}{2}}$ et $a_i = \alpha_i b_i$, $\varphi_i = \alpha_i \varphi_i$, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \Pi \otimes K(H^{(\infty)})$

Comme $\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\| < \infty$, $\varphi \in \Pi \otimes B(H^{(\infty)})_*$ par $\varphi([a_i]_f) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle a_i, i, \varphi_i \rangle \xrightarrow{\text{pour tout}} 0$
 $[a_i]_f \in \Pi \otimes B(H^{(\infty)})$

Théorème 1. Soit Γ un groupe discret. Alors Γ a AP si $VN(\Gamma)$ a w^* -OAP (note - 19/6/2012) Michael

→ Def: une avN M a w^* -OAP si $\exists (T_\alpha)$ suite d'op^s de rang fini $M \rightarrow M$ w^* continue
 telle que $T_\alpha \rightarrow 1$ stable-point w^* , i.e. $T_\alpha \otimes \text{id}(a) \xrightarrow{w^*} a$ pour tout $a \in M \otimes \mathbb{C}^2$

Théorème 2: Si G est loc. compact et $\Gamma < G$ un réseau, Γ a AP si G a AP

Def: $\Gamma < G$ est un réseau si $\exists \Omega \in G$ mesurable de mesure finie tel que
 "domaine fondamental"
 $\Gamma \times \Omega \rightarrow G$ est une bijection bimesurable
 $\gamma \times \omega \mapsto \gamma \omega$

Q de Guixiang: est-ce la même preuve que pour T_1, T_2 groupes, T_2 compact, T_1 AP $\Leftrightarrow T_1 \times T_2$ AP?

preuve du th 1. $(\Rightarrow)$ résulte de ce qu'on nous a déjà fait: Γ a AP $\Leftrightarrow \exists u_\alpha \in A(\Gamma)$
 $M_{u_\alpha} \xrightarrow{\text{id stable-point } w^*} \text{id}$

Si Γ est discret, $A_c(\Gamma) = \{\varphi: \Gamma \rightarrow \mathbb{C} \text{ à support fini}\}$ et donc $\text{rang } M_{u_\alpha} < \infty$

$(\Leftarrow)$ on utilise que si on a AP, il existe des $u_\alpha \in A(G)$ tel que $M_{u_\alpha} \rightarrow \text{id}$ stable-point w^*

puisque $A_c(G)$ est dense dans $A(G)$. Soit T_α qui réalise la w^* -OAP. Définissons

$u_{\alpha, \gamma}(x) = \alpha(T_\alpha(\lambda(x)) \lambda(x)^*)$. 2 Claims: ① $u_{\alpha, \gamma} \in A(\Gamma)$

② $M_{u_\alpha} \rightarrow \text{id}$ stable-point w^*

① Il suffit de considérer T_α de rang 1: $T_\alpha(u) = \tau(a_n)y$ avec $y \in VN(\Gamma)$ et $a \in L(VN(\Gamma))$

On montre que $u_\alpha \in \ell^2(\Gamma) \subset A(\Gamma)$: $u_\alpha(x) = \tau(a \lambda(x)) \tau(y \lambda(x)^*)$

② Soit $a \in VN(\Gamma) \otimes B(\ell_2)$ et $\varphi \in (VN(\Gamma) \otimes B(\ell_2))_*$. Regardons $\langle \varphi, M_{u_\alpha} \otimes \text{id}(a) \rangle$.
 $\xrightarrow{\text{car } \ell^2(\Gamma) \subset A(\Gamma)} \xrightarrow{\text{car } \ell^2(\Gamma) \subset A(\Gamma)} \tau(y^* y) = \tau(y^* y)$

On a : $VN(\Gamma) \xrightarrow{\lambda} VN(\Gamma \times \Gamma) = VN(\Gamma) \otimes VN(\Gamma)$ (6)
 $\lambda(r) \mapsto \lambda(r) \otimes \lambda(r)$: alors $\lambda(r) \otimes \lambda(r') \mapsto \delta_{r,r'} \lambda(r)$

$$M_{u_\alpha}(\lambda(r)) = E \left(T_\alpha \otimes id_{VN(\Gamma)} (i(\lambda(r))) \right) = \tau(T_\alpha(\lambda(r)\lambda(r)^*)) \lambda(r)$$

Alors $\langle \varphi, \Pi u_\alpha \otimes id(a) \rangle = \langle \varphi, E \circ (T_\alpha \otimes id_{VN(\Gamma)} \circ i) \otimes id_{B(\mathbb{R})}(a) \rangle$
 $= \langle \varphi, E \otimes id_{B(\mathbb{R})} \circ (T_\alpha \otimes id_{VN(\Gamma)} \otimes id_{B(\mathbb{R})}) \circ (i \otimes id_{B(\mathbb{R})})(a) \rangle$
 $\stackrel{\text{E : espérance conditionnelle}}{=} \langle \varphi, E \otimes id_{B(\mathbb{R})} \circ (T_\alpha \otimes id_{VN(\Gamma)} \otimes id_{B(\mathbb{R})}) \circ (i \otimes id_{B(\mathbb{R})})(a) \rangle$
 $\text{de } VN(\Gamma) \otimes VN(\Gamma) \otimes B(\mathbb{R}) \text{ sur } VN(\Gamma) \otimes B(\mathbb{R})$

$$= \langle \tilde{E}_* \varphi, T_\alpha \otimes id_{VN(\Gamma)} \otimes id_{B(\mathbb{R})}(\tilde{a}) \rangle \xrightarrow{*} \langle \tilde{E}_* \varphi, \tilde{a} \rangle$$

Preuve du th2 $\Leftrightarrow$ Soit $u_\alpha \in A_c(G)$ tels que $u_\alpha \xrightarrow{\sigma(M_0 A(G), Q(G))} 1$ où $Q(u)$ est l'adhérence de $L^1(u)$

dans $\Pi_0 A(G)^*$, où $f \in L^1(u)$ et on a comme $\langle f, u \rangle = \int f(s) u(s) ds$ pour $u \in \Pi_0 A(G)$.
 C'est un préduel de $\Pi_0 A(G)$.

Notons : soit $f \in C_c(G)$, $f \geq 0$, $\int f = 1$, soit $v_\alpha = (f * u_\alpha)|_\Gamma$ à support fini : $v_\alpha \in A(\Gamma)$

On va vérifier que $R: u \mapsto f * u|_\Gamma$ est $\sigma(\Pi_0 A(G), Q(G)) - \sigma(\Pi_0 A(\Gamma), Q(\Gamma))$ -continue.

Il suffit de montrer que $R^*: \Pi_0 A(\Gamma)^* \rightarrow \Pi_0 A(G)^*$ renvoie $R^*(L^1(\Gamma)) \subset L^1(G)$

Soit $h \in L^1(\Gamma)$ et $u \in \Pi_0 A(G)$: $\langle R^* h, u \rangle = \langle h, f * u|_\Gamma \rangle = \sum_r h(r) \int f * u(r) = \sum_r h(r) \int_G f(s) u(s^{-1}r) dr = \int_G u(s) \left(\sum_r h(r) f(rs^{-1}) \right) ds$
 $= \int_G u(s) \left(\sum_r h(r) f(rs^{-1}) \right) ds = \int_G u(s) \left(\sum_r h(r) f(rs^{-1}) \right) ds$

($\Rightarrow$) Soit $v_\alpha \in A(\Gamma)$ tels que $v_\alpha \xrightarrow{\omega^*} 1$

On définit $\Pi v_\alpha = u_\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}$ par "induction" : $u_\alpha(s) = \int_G v_\alpha(g \omega(s)) d\mu(g)$ "G-invariante car admettant un état"
 où $g = \gamma(g) \omega(g)$ pour $g \in G$. "en fait on n'en a pas besoin"

Caract : (1) $u_\alpha \in A(G)$ (2) $u_\alpha \xrightarrow{\omega^*} 1$
 preuve du fait 1 : $A(G) = \{ \gamma \mapsto \langle \gamma(s) \xi, \eta \rangle : \xi, \eta \in L^2(G) \} = \{ \gamma \mapsto \xi * \eta(s), \xi, \eta \in L^2(G) \}$

On écrit $v_\alpha(r) = \langle \lambda(r) \xi, \eta \rangle$ avec $\xi, \eta \in L^2(\Gamma)$...

(2) on vérifie que Π est ω^* -continue.