Critère pour non (AP)

Cet exposé est basé sur le début de l'article de U. Haagerup et T. de Laat : « Simple Lie groups without the approximation property ».

Dans toute la suite, G désigne un groupe localement compact et dénombrable à l'infini.

Remarque : La dénombrabilité à l'infini est automatique si le groupe localement compact G est connexe.
En effet, il existe alors U un voisinage compact du neutre que l'on peut supposer stable par l'inverse ; le sous-groupe engendré par U est $H = \cup_{n\in\mathbb{N}} U^n$. H est ouvert car si $x \in H$ alors xU est un voisinage de x inclus dans H. Chacune des classes à gauche gH est également ouverte, et puisque $H = G \setminus \cup_{g\notin H} gH$, H est aussi fermé. Par connexité de G on en déduit que $G = \cup_{n\in\mathbb{N}} U^n$. Chacun des U^n étant compact, G est donc dénombrable à l'infini.

Rappel : Le prédual naturel de $A(G)$ est le Banach noté $Q(G)$ qui est le complété de $L^1(G)$ pour la norme $\|f\|_Q = \sup\left\{\left|\int_G f(x)u(x)dx\right|, \|u\|_{M_0A(G)} \leq 1\right\}$.

Définition : G a la propriété d'approximation (AP) s'il existe une suite généralisée (φ_α) d'éléments de $A(G)$ telle que $\varphi_\alpha \to 1$ pour la topologie $\sigma = \sigma(M_0A(G), Q(G))$.

Remarque : Si on peut choisir les φ_α dans $A_c(G)$, on obtient l'assertion 1) du théorème énoncé par Guixiang la dernière fois. Or $A_c(G)$ est dense dans $A(G)$ pour la norme de $A(G)$ (si $\varphi \in A(G)$, il existe $\xi, \eta \in L^2(G)$ t.q. $\varphi = < \lambda(.)\xi, \eta >$ et $\|\varphi\| = \|\xi\|\|\eta\|$. On choisit (ξ_n) et (η_n) dans $C_c(G)$ t.q. $\xi_n \to \xi$ et $\eta_n \to \eta$ dans $L^2(G)$, on a alors $\varphi_n = < \lambda(.)\xi_n, \eta_n > \in A_c(G)$ et $\varphi_n \to \varphi$ dans $A(G)$). Il s'ensuit que $1 \in \overline{A(G)}^\sigma$ ssi $1 \in \overline{A_c(G)}^\sigma$. Donc G a (AP) ssi G vérifie l'une quelconque des assertions équivalentes énoncées par Guixiang dans son exposé.

Théorème : Soit G un groupe localement compact et dénombrable à l'infini et K un sous-groupe compact.
On suppose que :

1. $\forall \varphi \in M_0A(G)^\#$ φ a une limite à l'infini que l'on note φ_∞.
2. $\exists e \in C_0(G)$, $\forall \varphi \in M_0A(G)^\#$ $\forall g \in G \quad |\varphi(g) - \varphi_\infty| \leq e(g)\|\varphi\|_{M_0A(G)}$.

Alors G n'a pas (AP).

Remarque : Il s'agit du critère utilisé dans HdL pour montrer que $SL(3,\mathbb{R})$ et $Sp(2,\mathbb{R})$ n'ont pas (AP) (en l'appliquant avec K sous-groupe compact maximal). Par un argument abstrait, ils en déduisent que tout groupe de Lie simple à centre fini et de rang réel supérieur ou égal à 2 n'a pas (AP) (théorème 4.1 dans HdL).

Rappel : Soit K un sous-groupe compact de G. On dit que $f \in C(G)$ est K-bi-invariante lorsque :

$$\forall (k,k') \in K^2 \; \forall g \in G \quad f(kgk') = f(g).$$

Si $f \in C(G)$, on définit $f^\# \in C(G)$ par

$$\forall g \in G \quad f^\#(g) = \int_{K\times K} f(kgk')dkdk' \quad (\star)$$

où dk est la proba de Haar sur K. $f \mapsto f^\#$ est la projection sur les fonctions continues K-bi-invariantes.

Faits :

1. $(\star)$ permet de définir $f^\#$ pour $f \in L^1(G)$ et $f \mapsto f^\#$ est une contraction sur $L^1(G)$.
2. # est une contraction sur $A(G)$.
3. # est une contraction sur $M_0A(G)$, # est σ-σ-continue sur $M_0A(G)$ et $M_0A(G)^\#$ est σ-fermé.

Preuve. Pour 1 : si $f \in L^1(G)$ est positive, on a par Fubini-Tonelli et en utilisant l'invariance de la mesure de Haar sur G :

$$\int_G f^\#(g)dg = \int_{K^2}\int_G f(kgk')dgdkdk' = \int_{K^2}\int_G f(g)\Delta(k'^{-1})dgdkdk'$$

Comme la fonction modulaire Δ est un homomorphisme continu de G vers $(\mathbb{R}_+^*, \times)$, $\Delta(K)$ est un sous-groupe compact de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$, donc $\Delta(K) = \{1\}$. On en déduit que $\int_G f^\#(g)dg = \int_G f(g)dg$ ce qui suffit.
Pour 2 : soit $\varphi \in A(G)$, il existe ξ, $\eta \in L^2(G)$ t.q. $\varphi =< \lambda(.)\xi, \eta >$ et $\|\varphi\| = \|\xi\|\|\eta\|$. On a alors $\varphi^\# =< \lambda(.)\xi', \eta' >$ où $\xi' = \int_K \lambda(k)\xi dk$ et $\xi' = \int_K \lambda(k)\eta dk$. Et dk étant une proba, on a par inégalité triangulaire $\|\varphi^\#\| \leqslant \|\xi\|\|\eta\| = \|\varphi\|$.
Pour 3 : on commence par rappeler la caractérisation suivante de $M_0A(G)$ dûe à Bożejko et Fendler :
$\varphi \in M_0A(G)$ ssi $\exists H$ un Hilbert et $P, Q : G \to H$ continues et bornées t.q.

$$\forall x, y \in G \quad \varphi(y^{-1}x) =< P(x), Q(y) > \quad (\star\star)$$

De plus, $\|\varphi\|_{M_0A(G)} = \min\{\|P\|_\infty\|Q\|_\infty\}$ où le minimum est pris sur toutes les écritures $(\star\star)$ possibles.
Soit $\varphi \in M_0A(G)$. Soit H et P, Q vérifiant $(\star\star)$ et $\|\varphi\|_{M_0A(G)} = \|P\|_\infty\|Q\|_\infty$. Il est alors clair que pour tout $x, y \in G$, on a

$$\varphi^\#(y^{-1}x) = \int_{K^2} < P(xk'), Q(yk^{-1}) > dkdk' =< P'(x), Q'(y) >$$

où $P'(x) = \int_K P(xk)dk$ et $Q'(x) = \int_K Q(yk)dk$ définissent des fonctions continues et bornées sur G.
On a $\|P'\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty$ et $\|Q'\|_\infty \leqslant \|Q\|_\infty$ d'où $\varphi^\# \in M_0A(G)$ et $\|\varphi^\#\|_{M_0A(G)} \leqslant \|\varphi\|_{M_0A(G)}$.
Montrons que # est σ-σ-continue sur $M_0A(G)$. Par commodité d'écriture, on note D l'opérateur # sur $M_0A(G)$. On a : D est σ-σ-continu ssi $D^*(Q(G)) \subset Q(G)$. Par densité de $L^1(G)$ dans $Q(G)$, il suffit de montrer que $D^*(L^1(G)) \subset L^1(G)$. Soit $f \in L^1(G)$ et $u \in M_0A(G)$, on a par Fubini :

$$\begin{aligned}
< D^*f, u > =< f, Du >&= \int_G f(x)Du(x)dx = \int_{K^2}\int_G f(x)u(kxk')dxdkdk' \\
&= \int_{K^2}\int_G f(k^{-1}xk'^{-1})\Delta(k'^{-1})u(x)dxdkdk' = \int_{K^2}\int_G f(k^{-1}xk'^{-1})u(x)dxdkdk' \\
&= \int_G\int_{K^2} f(k^{-1}xk'^{-1})u(x)dkdk'dx = \int_G f^\#(x)u(x)dx \\
&=< f^\#, u >
\end{aligned}$$

On a donc $D^*f = f^\# \in L^1(G)$ d'après le 1).
Il reste à prouver que $M_0A(G)^\#$ est σ-fermé. Or # étant une projection, $M_0A(G)^\#$ est l'ensemble des points fixes de # ; par σ-σ continuité de # cet ensemble de points fixes esr σ-fermé.

Remarque : Pour $k \in K$, on note L_k et R_k les opérateurs de translation à gauche et à droite sur $M_0A(G)$. Le même genre d'argument que pour # montre que L_k et R_k sont des contractions σ-σ-continues sur $M_0A(G)$ (et on a pour $f \in L^1(G)$ $L_k^*(f) = f(k^{-1}\cdot)$ et $R_k^*(f) = f(\cdot\, k^{-1})$). On aurait pu déduire la σ-σ-continuité de # à partir de celle des L_k et R_k via l'écriture (au sens de l'intégrale de Bochner) $D = \int_{K^2} L_kR_{k'}dkdk'$. Le résultat découle du fait général suivant pour l'intégrale de Bochner : soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, Y un Banach et $T : \Omega \to Y$ intégrable au sens de Bochner. Si T est à valeurs dans F sous-espace fermé de Y, alors $\int_\Omega Td\mu \in F$.
On en déduit alors que si X est un Banach et $T : \Omega \to B(X^*)$ est intégrable au sens de Bochner et si pour tout $\omega \in \Omega$, $T(\omega)$ est $\sigma(X^*, X)$-$\sigma(X^*, X)$ continue, alors $\int_\Omega Td\mu$ l'est aussi (en effet $S \in B(X^*)$ est $\sigma(X^*, X)$-$\sigma(X^*, X)$ continue ssi $\forall x \in X$ $< S(.), x > \in X \subset X^{**}$; on est ainsi ramené au fait général énoncé plus haut).

Lemme : (2.5 dans HdL) Soit G un groupe localement compact et K un sous-groupe compact de G.
Si G a (AP) alors il existe (φ_α) suite généralisée de fonctions K-bi-invariantes dans $A(G)$ telle que $\varphi_\alpha \to 1$ pour la topologie σ.

Preuve. C'est immédiat avec ce qui a déjà été démontré : soit (φ_α) une suite généralisée dans $A(G)$ telle que $\varphi_\alpha \to 1$ pour la topologie σ. Par σ-σ-continuité de #, on a $\varphi_\alpha^\# \to 1$ pour la topologie σ et d'après le fait 2) précédent les $\varphi_\alpha^\#$ sont dans $A(G)$ et K-bi-invariantes.

Lemme : (2.6 dans HdL) Soit (X,μ) un espace mesuré σ-fini et soit $v : X \to]0,+\infty[$ une fonction mesurable. Alors
$$S_v(X) = \{f \in L^\infty(X),\ |f(x)| \leqslant v(x)\ p.p.\}$$
est fermé pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Preuve. On peut vérifier que :

$$|f| \leqslant v \text{ p.p.} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall g \in L^1 \quad \mathrm{Re}\left(\int_X fg\,d\mu\right) \leqslant \int_X v|g|\,d\mu.$$

Et cette reformulation est clairement une condition $\sigma(L^\infty, L^1)$ continue.
($\Longrightarrow$) est claire. Pour la réciproque, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $A_n = \{|f| > (1+\frac{1}{n})v\}$, il suffit de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ \mu(A_n) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \subset A_n$ tel que $\mu(A) < +\infty$. Soit $g = \mathbb{1}_A \frac{\overline{f}}{|f|} \in L^1$, on a :

$$\mathrm{Re}\left(\int_X fg\,d\mu\right) = \int_{A_n} |f|\,d\mu \geqslant \big(1+\frac{1}{n}\big)\int_A v\,d\mu.$$

Par ailleurs, on a :
$$\int_X v|g|\,d\mu = \int_A v\,d\mu.$$
On en déduit que
$$\big(1+\frac{1}{n}\big)\int_A v\,d\mu \leqslant \int_A v\,d\mu \quad \text{i.e} \quad \int_A v\,d\mu \leqslant 0$$
v étant à valeurs strictement positives, on a donc $\mu(A) = 0$. Comme μ est σ-finie on en déduit $\mu(A_n) = 0$.

Lemme : (2.7 dans HdL) G un groupe localement compact (dénombrable à l'infini) et K un sous-groupe compact de G. Soit $v : G \to]0,+\infty[$ une fonction mesurable. Alors $M_0A(G)^\# \cap S_v(G)$ est σ-fermé.

Preuve. Soit (φ_α) suite généralisée de $M_0A(G)^\# \cap S_v(G)$ converge vers $\varphi \in M_0A(G)$ pour la topologie σ. Par le fait 3), on a $\varphi \in M_0A(G)^\#$. Par ailleurs comme $L^1(G) \subset Q(G)$, $M_0A(G) \subset L^\infty(G)$ et que le crochet de dualité $Q(G)$-$M_0A(G)$ coïncide avec celui de $L^1(G)$-$L^\infty(G)$, on a aussi $\varphi_\alpha \to \varphi$ dans $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$. Donc $\varphi \in S_v(G)$ d'après le lemme 2.6.

Preuve. (du théorème) On commence par montrer que e est à valeurs strictement positives. On rappelle que $A(G)^\# \subset A(G) \subset C_0(G)$. Donc par 2) $\forall \varphi \in A(G)^\#\ \forall g \in G \quad |\varphi(g)| \leqslant e(g)\|\varphi\|_{M_0A(G)}$. Soit $g_0 \in G$. Il est facile de construire $\varphi \in A(G)$ positive telle que $\varphi(g_0) > 0$ (si U est un voisinage compact de e dans G, on peut choisir $\varphi(.) =< \lambda(.)\mathbb{1}_{g_0^{-1}U}, \mathbb{1}_U >$). On a alors aussi $\varphi^\#$ positive et $\varphi^\#(g_0) > 0$. Il s'ensuit que $0 < |\varphi^\#(g_0)| \leqslant e(g_0)\|\varphi^\#\|_{M_0A(G)}$ et donc $e(g_0) > 0$.

Soit le sous-espace $A = M_0A(G)^\# \cap C_0(G) \subset M_0A(G)$. D'après 2) sa boule unité fermée A_1 vérifie :

$$A_1 = \{\varphi \in M_0A(G)^\#,\ \forall g \in G \quad |\varphi(g)| \leqslant e(g)\} \cap M_0A(G)_1 = M_0A(G)^\# \cap S_e(G) \cap M_0A(G)_1$$

Par le lemme 2.7, il s'ensuit que A_1 est σ-fermé.

On rappelle le théorème de Krein-Smulian :
Soit X un Banach et $A \subset X^*$ un convexe t.q. $\forall r > 0\ \ A \cap (X^*)_r$ est $\sigma(X^*, X)$ fermé. Alors A est $\sigma(X^*, X)$ fermé. Lorsque A est un sous-espace de X^*, il suffit de vérifier que A_1 est $\sigma(X^*, X)$ fermé (par continuité $\sigma(X^*, X)$ des homothéties).

On peut appliquer Krein-Smulian avec $X = Q(G)$ et $A = M_0A(G)^\# \cap C_0(G)$. On obtient que $M_0A(G)^\# \cap C_0(G)$ est σ-fermé. Or $A(G)^\# \subset M_0A(G)^\# \cap C_0(G)$, donc $\overline{A(G)^\#}^\sigma \subset M_0A(G)^\# \cap C_0(G)$ et donc $1 \notin \overline{A(G)^\#}^\sigma$. D'après le lemme 2.5, G n'a donc pas (AP).

Remarque : On n'a pas utilisé le fait que tout $\varphi \in M_0A(G)^\#$ a une limite à l'infini. L'hypothèse 1) du théorème est inutile, il suffit simplement d'avoir l'estimation 2) pour les fonctions de $M_0A(G)^\# \cap C_0(G)$.