

Théorème : G groupe loc. compact (dénombrable à l'infini, i.e. avec une dénombrable de voisinages de e) et K s.g. compact de G .

Supposons que ① $\forall \varphi \in M_0 A(G)^\#$ φ a une limite à l'infini notée φ_∞ .

② $\exists \varepsilon \in C_0(G) \forall \varphi \in M_0 A(G)^\# \forall g \in G |\varphi(g) - \varphi_\infty| \leq \varepsilon(g) \| \varphi \|_{M_0 A(G)}$

[Alex. pense que ② suffit, car on ne considère que des φ qui tendent vers 0 à l'infini.]

Rappel : $f \in C(G)$ est K -biinvariant si $\forall (h, h') \in K \times K \forall g \in G f(hgh') = f(g)$.

Si $f \in C(G)$, on pose $f^\#(g) = \int_{K \times K} f(hgh') dh dh'$ où dh est une proba de Haar sur K .

Claim: ① $f^\#$ marche aussi pour $f \in L^1(G)$ et $f \mapsto f^\#$ est une contraction sur $L^1(G)$.

② Si $f \in A(G)$, alors $f^\# \in A(G)$ et $\|f^\#\|_{A(G)} \leq \|f\|_{A(G)}$

③ $f^\#$ est une contraction sur $M_0 A(G)$ qui est $\sigma(M_0 A(G), Q(G))$ -continue, et $M_0 A(G)^\#$ est σ -fermée dans $M_0 A(G)$.

preuve : 1) si $f \geq 0$, $\int_G f^\#(g) dg = \int_{K \times K} \int_G f(hgh') dg dh dh' = \int_{K \times K} \int_G f(g) dh dh' = \int_{K \times K} 1 dg dh dh' = 1$ car K compact.

2) Il existe $\xi, \eta \in L^2(G)$ tels que $f(\cdot) = \langle \lambda(\cdot) \xi, \eta \rangle = \|f\|_1$.

et $\|f\|_{A(G)} = \|\xi\| \|\eta\|$. On a alors $f^\#(\cdot) = \langle \lambda(\cdot) \int_K \lambda(h) \xi dh, \int_K \lambda(h) \eta dh \rangle$

Donc $f^\# \in A(G)$ et $\|f^\#\|_{A(G)} \leq \|\xi\| \|\eta\| \leq \|\xi\| \|\eta\| = \|f\|_{A(G)}$.

③ Si $f \in M_0 A(G)$, Bożejko Fendler donne l'espace de Hilbert et $P, Q \in \mathcal{H}$ (avec $\mathcal{H} \xrightarrow{\text{weak}} \mathcal{H}$) tels que $\forall x, y \in G f(y^{-1}x) = \langle P(x), Q(y) \rangle$ avec $\|P\| \|Q\| = \|f\|_{M_0 A(G)}$.

Donc $\forall x, y \in G f^\#(y^{-1}x) = \iint_{K \times K} \langle P(xh'), Q(yh) \rangle dh dh' = \langle \int_K P(xh') dh, \int_K Q(yh) dh \rangle$.

Donc $f^\# \in M_0 A(G)$ et $\|f^\#\| \leq \|P'\|_\infty \|Q'\|_\infty \leq \|f\|_{M_0 A(G)}$.

Notons D l'opérateur $\#$ sur $M_0 A(G)$: il suffit de voir que $D^*(Q(G)) \subseteq Q(G)$.

voire que $D^*(L^1(G)) \subseteq L^1(G)$.

Soit $u \in M_0 A(G)$ et $f \in L^1(G)$: $\langle f, D(u) \rangle = \int_G u^\#(g) f(g) dg = \int_G u(g) f^\#(g) dg$.

D'où: $D^*(f) = f^\#$ pour $f \in L^1(G)$, d'où la σ -continuité!

Nonobstant $M_0 A(G)^\#$ est σ -fermée: sur $M_0 A(G)$, $L_K: f \mapsto f(h \cdot)$ et $R_K: f \mapsto f(\cdot h)$ sont contractants et σ -continues. Donc $M_0 A(G)^\#$ est σ -fermée.

Lemme [2.5 de H-DeLaat] $G \text{ n. AP} \Leftrightarrow \exists (\varphi_\alpha)$ filtre dans $A(G)^\#$ $\varphi_\alpha \rightarrow 1$
 preuve: découle de ①, ②, ③.

Lemme [2.6 de H-DeLaat] Soit (X, μ) un espace mesuré σ -fini et $v: X \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ mesurable. Notons $S_v(X) = \{f \in L^\infty(X) : |f(x)| \leq v(x) \text{ p.p.}\}$ ^{Alors $S_v(X)$ est $\sigma(L^\infty(X), L^1(X))$ -fermé}
 preuve: Comme (X, μ) est σ -fini, on peut supposer (X, μ) fini. On va aussi supposer

$$v \gg \alpha > 0. \text{ Or } |f| \leq v \text{ p.p.} \Leftrightarrow \forall g \in L^1 \quad \operatorname{Re} \left(\int_X fg d\mu \right) \leq \int_X |g| v d\mu. \quad (*)$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \{ |f| > (1 + \frac{1}{n})v \}$. Il suffit de mg $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mu(A_n) = 0$.

On teste (*) sur $g = \frac{1}{\mu(A_n)} \chi_{A_n}$. À gauche on trouve $\int_{A_n} |f| d\mu > (1 + \frac{1}{n}) \int_{A_n} v d\mu$.
 À droite, $\int_{A_n} v d\mu$. Si $\mu(A_n) > 0$, on aboutit à une

Lemme [2.7 de H-DeLaat] G loc.-compact, K sg compact et $v: G \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ mesurable. Alors $\Pi_0 A(G)^\# \cap S_v(G)$ est σ -fermé.

Preuve: Si (φ_α) net dans $\Pi_0 A(G)^\#$ qui converge pour la topologie $\sigma(\cdot)$ vers $\varphi \in \Pi_0 A(G)$, on a $\varphi \in \Pi_0 A(G)^\#$ par le claim ③. Or $L^1(G) \subseteq Q(G)$ et le crochet de dualité sur $Q(G) - \Pi_0 A(G)$ est le même que celui sur $L^1(G) - L^\infty(G)$.

Preuve du théorème: On utilise le fait que $\exists e \in C_0(G) \forall \varphi \in \Pi_0 A(G)^\# \cap C_0(G) \forall g \in G$

Fait: e a des valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Soit $g_0 \in G$. Il suffit d'exhiber $\varphi \in A(G)^\#$ tel que $\varphi(g_0) > 0$. On prend un voisinage compact du neutre et on pose $\varphi(\cdot) = \langle \chi \cdot, \chi \rangle_{\mathcal{H}}$.

Alors $\varphi(g_0) > 0$ et $\varphi \geq 0$ et $\varphi \in A(G)$. Alors $\varphi^\# \geq 0$ et $\varphi^\# \in A(G)^\#$ et $\varphi^\#(g_0) > 0$.

Appliquons le théorème de Krein-Smulan: si X est Banach et A convexe $\subset X^*$ et $\forall x \in A \cap (X^*)^\circ$ est $\sigma(X^*, X)$ -fermé, alors A est $\sigma(X^*, X)$ -fermé, si A est un s.e. vectoriel de X^* , alors il suffit que $A \cap (X^*)^\circ$ soit $\sigma(X^*, X)$ -fermé. Ici, on pose $A = \Pi_0 A(G)^\# \cap C_0(G) \subseteq \Pi_0 A(G)$.

$$O = A \cap (\Pi_0 A(G))^\circ = \underbrace{\{ \varphi \in \Pi_0 A(G)^\# : |\varphi(g)| \leq e(g) \}}_{\text{pour } g \in G} \cap \underbrace{(\Pi_0 A(G))^\circ}_{\omega^* \text{-fermé}} \text{ est } \sigma \text{-fermé par 2.7.}$$

Donc $\Pi_0 A(G)^\# \cap C_0(G)$ est $\sigma(\cdot)$ -fermé. Or $G \text{ n. AP}$ si $1 \in \overline{A(G)^\#}^{\sigma(\cdot)}$ ou $\overline{A(G)^\#}^{\sigma(\cdot)}$ est inclus dans $\Pi_0 A(G)^\# \cap C_0(G)$ et donc $1 \notin \overline{A(G)^\#}^{\sigma(\cdot)}$.