

$SL_3\mathbb{R}$ n'a pas la propriété d'approximation.

Prop 5.2 de Har-DeLaat: soit $G = SL(3, \mathbb{R})$ et $K = SO(3)$.

① Tout $\varphi \in M_0 A(G)^\#$ a une limite à l'infini φ_∞

② Si $\varphi \in M_0 A(G)^\#$, $s, t \geq 0$, alors $|\varphi(D(s, t)) - \varphi_\infty| \leq 88 e^{-\frac{s+t}{8}} \|\varphi\|_{M_0 A(G)}$

Rappel: • décomposition polaire dans $SL(3, \mathbb{R})$: si $g \in SL(3, \mathbb{R})$, il existe h_1, h, k et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3$ tels que $g = h_1 \begin{pmatrix} e^{\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\alpha_3} \end{pmatrix} h_2$

• Chgt de variable pour la matrice diagonale: si $s, t \in \mathbb{R}$, $D(s, t) = e^{-\frac{s+t}{2}} \begin{pmatrix} e^{s+t} & & \\ & e^t & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

On pose $\overline{A^+} = \{D(s, t) : s, t \geq 0\}$

Tout repose sur des estimations pour la paire de Gelfand (SO_3, SO_2) .

Notons $K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & SO(2) \end{pmatrix} \subseteq SO(3)$.

Lemme 5.3: Soit $\varphi: K \rightarrow \mathbb{C}$ multiplicateur de Fourier et K_0 -biinvariant

① Il existe $\varphi_0: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $\varphi(g) = \varphi_0(g_{11})$ pour tout $g \in K$.

② Si $x \in [-1, 1]$, $|\varphi_0(x) - \varphi_0(0)| \leq 4\sqrt{|x|} \|\varphi\|_{M_0 A(K)}$

Dém: ① $K_0 \backslash K / K_0 = \{K_0 \cdot h \cdot K_0 : h \in K\}$ un système complet de représentants est donné par $K_0 x K_0$ où $x = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\vartheta \in (0, \pi]$. Donc toute f K_0 biinvariante se factorise à travers $K_0 \backslash K / K_0 \xrightarrow{\sim} [-1, 1]$.

Calcul: Si $g \in SO(3)$ et $g = \begin{pmatrix} \alpha & \epsilon_0 \\ & A \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \epsilon_0 B' \\ B \alpha & BAB' \end{pmatrix}$.

Si $g \in SO(3)$, $|\alpha| \leq 1$, $\alpha = \cos \vartheta$, $\vartheta \in (0, \pi]$,

→ on distingue 2 cas: • $\alpha = \pm 1$

• $|\alpha| < 1$: $\|d\| = \|c\| = |\sin \vartheta| = \|(0, -\sin \vartheta)\| = \|(\sin \vartheta, 0)\|$

Il existe donc d'unique $B, B' \in SO(2)$ tels que

$$B \alpha = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, B' (-\sin \vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta - \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta - \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

Donc (φ, φ) est stable par cette matrice: $BAB' = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\varphi \in (0, \pi]$, notons $h_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \in K_0$. Si $g \in SO(3)$, il existe $(\varphi, \vartheta, \psi) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi]$ tel que $g = h_\varphi x_\vartheta h_\psi$

On identifie ainsi la mesure de Haar sur $SO(3)$: si $f \in C(K)$,

$$\int_K f d\mu = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi f(g(\varphi, \vartheta, \psi)) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi d\psi$$

Rappel: G g.l.c., K s.g.c. de G . (G, K) est une paire de Gelfand lorsque $(C_c(G)^\#, *)$ est une algèbre commutative, ce qui équivaut à $(\nu(G))'$ abélienne, où ν est la restriction à $L^1(G/K) = \{f \in L^1(G) : \forall k \in K, f(k) = f\}$ de la régularité gauche. Si G est compact, cela équivaut à: $\forall \pi$ irrep. de G sur H_π , $H_\pi^e = \{h \in H_\pi : \forall k \in K, \pi(k)h = h\}$ est un $\mathbb{C}$ -espace de dimension 1.

On note $\hat{G}$ l'ensemble des irrep de G et $\hat{G}_K$ les $\pi \in \hat{G}$ tels que H_π^e est de dim. 1.

Def: (G, K) paire de Gelfand, $h: G \rightarrow \mathbb{C}$ continue bi-invariante est une fonction sphérique lorsque $\int_K h(nky) dk = h(n)h(y)$ pour $n, y \in G$.

Si G est compact, toute f^* sphérique est de la forme $h_\pi(n) = \langle \pi(n) \xi_\pi, \xi_\pi \rangle$ où $\pi \in \hat{G}_K$ et ξ_π vecteur unitaire de H_π^e .

Prop: (G, K) paire de Gelfand et G compact et $\varphi \in M_0 A(G)^\#$, il existe une unique $(c_\pi)_{\pi \in \hat{G}_K}$ sommable telle que $\|\varphi\|_{M_0 A(G)} = \sum_{\pi \in \hat{G}_K} |c_\pi|$ et $\varphi = \sum_{\pi \in \hat{G}_K} c_\pi h_\pi$.

Dém: Si G est compact, $M_0 A(G) = A(G)$ et $\lambda = \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} d_\pi \pi$ où $d_\pi = \dim H_\pi$ et $L(G) \cong \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} (H_\pi \otimes H_\pi)$.

et donc $A(G) \cong \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} S_2(H_\pi)$. Il existe $(S_\pi)_{\pi \in \hat{G}_K}$ avec $S_\pi \in S_2(H_\pi)$ tels que

si $n \in G$, $\varphi(n) = \langle \lambda(n), \varphi \rangle = \sum_{\pi \in \hat{G}_K} \text{tr}(S_\pi \pi(n))$ et $\|\varphi\|_{A(G)} = \sum_{\pi \in \hat{G}_K} \|S_\pi\|_1$.

La paire de Gelfand nous permet d'écrire: φ est K -bi-invariante: si $P_\pi = \int_K \pi(a) da$, $\varphi(n) = \sum_{\pi \in \hat{G}_K} \text{tr}(P_\pi S_\pi P_\pi \pi(n))$ en moyennant à gauche et à droite.

Pour $\pi \in \hat{G}_K$, $\text{rg}(P_\pi) = 1$ et donc $P_\pi S_\pi P_\pi = c_\pi \langle \cdot, \xi_\pi \rangle \xi_\pi$ et

$\varphi(n) = \sum_{\pi \in \hat{G}_K} c_\pi \langle \pi(n) \xi_\pi, \xi_\pi \rangle$ et $\varphi(n) = \sum_{\pi \in \hat{G}_K} c_\pi h_\pi(n)$, où $\|P_\pi S_\pi P_\pi\|_1 = \|S_\pi\|_1 = |\text{tr}(S_\pi)|$ ($P_\pi S_\pi P_\pi = S_\pi$)

(On avait vérifié des exposés de Nishiel que h_π était sphérique)

On a aussi $h_\pi \perp h_{\pi'}$ dans $V(G)$, ce qui permet de calculer les c_π .

Cela démontre incidemment que seuls les h_π sont sphériques si G est compact.

Sur la paire $(SO(3), SO(2)) : K_0 = SO(2) \hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & SO(2) \end{pmatrix}$

Ex 1 : ① pour $n \in \mathbb{N}$ on note H_n l'espace des polynômes à 3 variables, harmoniques et homogènes de $2n$. H_n est un $\mathbb{R}$ -se de dim $2n+1$ de $L^2(S_2)$

② Pour $g \in SO(3)$ et $P \in H_n$ $(\pi_n(g))(P)(y,z) = P \circ g(y,z)$ définit une représentation $\pi_n : g \in SO(3), \pi_n(g)(H_n) \subseteq H_n$ et $\pi_n(g)$ est unitaire dans $\mathcal{B}(H_n)$ et la famille $(\pi_n(g))_{g \in SO(3)}$ est un système de représentants de dans d'irrep 2 de $SO(3)$.

③ $(SO(3), SO(2))$ est une paire de Gelfand.

④ Les f^m sphériques h_n^0 sont les polynômes de Legendre P_n normalisés par $P_n(1) = 1$.

Dém : ① si $P \in H_n, P = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f_k(y,z)$ où f_k homogène de $2n-k$.

$$\text{Alors } \Delta P = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=2}^n \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} f_k(y,z) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \Delta f_k(y,z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \{0, \dots, n-2\} f_{k+2} = -\Delta f_k.$$

P est déterminé par f_0 et f_1 . Donc $\dim H_n = 2n+1$

② soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in H_n$ et $g \in SO(3) : \pi_n(g)(P)$ est homogène de $2n$ si $u \in \mathbb{R}^3, \text{Hess}_u(P \circ g) = (g \text{ Hess}_{g(u)}(P)) g$; en prenant la trace de deux côtés on obtient $\Delta(\pi_n(g)(P)) = 0$.

$\pi_n(g)$ est unitaire parce que la mesure sur S est invariante par rotation.

③ $P \in H_n$ est $\pi_n(SO(2))$ -invariant si pour $a \in SO(2)$ et $k \in \{0, \dots, n\}, f_k(a(y,z)) = f_k(y,z)$, si f_0 et f_1 sont constants sur S .

Si $n=2p, f_0 = \alpha(y^2+z^2)^p$ et $f_1 = 0$ et donc $P = \alpha \sum_{k=0}^p \frac{x^{2k}}{(2k)!} (-1)^k 2^{2k} \frac{p!}{(p-k)!} (y^2+z^2)^{p-k}$

Si $n=2p+1, f_0 = 0$ et $f_1 = \beta(y^2+z^2)^p$ et donc $P = \beta \sum_{k=0}^p \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k 2^{2k} \frac{p!}{(p-k)!} (y^2+z^2)^{p-k}$

Ainsi $(SO(3), SO(2))$ est de Gelfand et $n \in \mathbb{N} \pi_n \in \widehat{K_{K_0}}$.

④ Les f^m sphériques sont les $h_n(-) = \langle \pi_n(\cdot) \xi_n, \xi_n \rangle$ où $\|\xi_n\|=1$ et $\xi_n \in H_n$

$$h_n(g) = \int_{S_2} (\pi_n(g) \xi_n)(u) \overline{\xi_n(u)} du \text{ et } h_n(\cos \vartheta) = \int_{S_2} (\pi_n(v_\vartheta) \xi_n)(u) \overline{\xi_n(u)} du$$

On doit pouvoir vérifier que h_n^0 est un polynôme de $2n$ en $\cos \vartheta$ et $h_n^0(\cos \vartheta) = P_n(\cos \vartheta)$
On a bien $h_n^0(1) = 1$.

D'après Peter-Weyl, les h_n sont 2 à 2 orthogonaux dans $L^2(SO(3))$; (4)

$$\text{si } n \neq m, \quad 0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi h_n(\varphi, \vartheta, \psi) \overline{h_m(\varphi, \vartheta, \psi)} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi d\psi$$

$$\text{par } K_0\text{-biinvariance on a } 0 = \int_0^\pi h_n(\vartheta) \overline{h_m(\vartheta)} \sin \vartheta d\vartheta$$

$$= \int h_n^\circ(\cos \vartheta) \overline{h_m^\circ(\cos \vartheta)} \sin \vartheta d\vartheta$$

$$= \int_{-1}^1 h_n^\circ(t) \overline{h_m^\circ(t)} dt. \quad \text{Donc } h_n^\circ \text{ et } h_m^\circ \text{ sont des polynômes de Legendre}$$

Lemme 5.11 : si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $|P_n(x) - P_n(y)| \leq 4|x-y|^{1/2}$

Voici comment on en déduit (2) du lemme 5.3 : soit $\varphi \in \mathcal{N}_0 A(K)$ K_0 -biinvariant et $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Il existe $c_n \in \mathbb{R}^1$ tel que si $n \in [-1, 1]$ $\varphi^\circ(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n h_n$ $\sum |c_n| = \|\varphi\|_{\mathcal{N}_0 A(K)}$

$$\text{Donc, si } n \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \quad |\varphi^\circ(x) - \varphi^\circ(0)| \leq 4\sqrt{|x|} \|\varphi\|_{\mathcal{N}_0 A(K)}.$$

$$\text{Si } |x| \geq \frac{1}{2}, \quad |P_n(x) - P_n(0)| \leq |P_n(x)| + |P_n(0)| \leq 2 \leq 4\sqrt{|x|}, \text{ d'où l'inégalité pour } \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1.$$

Lemme 5.4 : Soit $\varphi \in \mathcal{N}_0 A(G)^\#$ et $r \geq 0$. Si $\varphi_r : K \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par $\varphi_r(x) = \varphi(D(r,0)x D(r,0))$, φ_r est un multiplicateur de Fourier c.b. K_0 -biinvariant et $\|\varphi_r\|_{\mathcal{N}_0 A(K)} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{N}_0 A(G)}$.

Dém : $D(r,0) = e^{-\frac{r}{3}} \begin{pmatrix} e^r & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ donc $D(r,0)$ commute aux élt de K_0 ;

comme φ est K -biinv, φ_r est K_0 -biinvariant. Pour le reste, on applique Bozorgzadeh-Fendler :

$\varphi(y^{-1}x) = \langle P(x), Q(y) \rangle$ avec $P, Q : G \rightarrow \mathbb{C}$ continue et bornée avec $\|P\|_\infty \|Q\|_\infty = \|\varphi\|_{\mathcal{N}_0 A(G)}$.

[en fait il suffit de dire que $\|\cdot\|_{\mathcal{N}_0 A}$ est invariant par translation et diminue par restriction.]

Lemme 5.5 : Soit $\varphi \in \mathcal{N}_0 A(G)^\#$ et soit $q, r \geq 0$ avec $r \leq q$. Alors $|\varphi(D(2q, r-q)) - \varphi(X(0, r))| \leq 4e^{-\frac{r-q}{2}} \|\varphi\|_{\mathcal{N}_0 A(G)}$

preuve : $\varphi_r^\circ(\cos \vartheta) = \varphi(D(r,0) \text{ via } D(r,0))$; trouvons la décomposition polaire de $D(r,0)$ via $D(r,0) = e^{-\frac{2r}{3}} \begin{bmatrix} e^{2r} \cos \vartheta & -e^{2r} \sin \vartheta & 0 \\ e^{2r} \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; la décomposition polaire de $\begin{bmatrix} e^{2r} \cos \vartheta & -e^{2r} \sin \vartheta \\ \cos \vartheta & e^{2r} \cos \vartheta \end{bmatrix} = h_1 \begin{bmatrix} e^q & 0 \\ 0 & e^{-q} \end{bmatrix} h_2$ avec $h_1, h_2 \in SO(2)$ et $q \geq 0$.

Preuve 1. $\forall \theta$ de chaque côté : $(e^{2r} + e^{-2r}) \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta = e^{2q} + e^{-2q}$ et donc

$$\underbrace{(e^{2r} - 2 + e^{-2r})}_{\text{sh}^2 r} \cos^2 \theta = \underbrace{e^{2q} - 2 + e^{-2q}}_{\text{sh}^2 q} \quad \text{et donc } \text{sh } q = |\cos \theta| \text{ sh } r. \text{ On peut supposer } r > 0$$

Ainsi la déc. polaire de $D(r, 0)$ est $D(r, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{2r}{3}} \begin{pmatrix} e^{r+q} & \\ & e^{r-q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $\varphi_r^0(\cos \theta) = \varphi \left(e^{-2r/3} \begin{pmatrix} e^{r+q} & \\ & e^{r-q} \end{pmatrix} \right)$ et $\varphi_r^0(0) = \varphi_r^0(\cos \frac{\pi}{2}) = \varphi(D(0, r))$
($q=0$)

Alors $|\varphi(D(2q, r-q)) - \varphi(D(0, r))| \leq 4 \sqrt{|\cos \theta|} \|\varphi_r\|_{n_0 A(K)}$

Or $|\cos \theta| = \frac{\text{sh } q}{\text{sh } r} = \frac{1 - e^{-2q}}{1 - e^{-2r}} e^{q-r}$. Donc $\sqrt{|\cos \theta|} \leq \frac{\|\varphi\|_{n_0 A(a)}}{e^{-\frac{r-q}{2}}}$
 ≤ 1

Lemme 5.7 : Si $\varphi \in n_0 A(a)^\#$ et $0 \leq \frac{2}{3}u \leq v \leq \frac{3}{2}u$, $|\varphi(D(u, u)) - \varphi(D(v, v))| \leq 4e^{\frac{w}{4}} \|\varphi\|_{n_0 A(a)}$
où $w = \min(u, v)$

Fait : Si $\varphi \in n_0 A(a)^\#$ et $\check{\varphi} : G \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par $\check{\varphi}(g) = \varphi(g^{-1})$, alors $\check{\varphi} \in n_0 A(a)^\#$
et $\|\varphi\|_{n_0 A(a)} = \|\check{\varphi}\|_{n_0 A(a)}$.

et $\forall (s, t) \in \mathbb{R}_+^2$ $\check{\varphi}(D(s, t)) = \varphi(D(t, s))$:

on considère $h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in SO(3)$: alors $\varphi(h \cdot D(t, s) \cdot h) = \varphi(D(t, s))$
 $\check{\varphi}(D(s, t))$.

Lemme 5.7 : On applique le lemme 5.5 avec $q = \frac{r}{3}$:

$|\varphi(D(\frac{2r}{3}, \frac{2r}{3})) - \varphi(D(0, r))| \leq 4 e^{-\frac{r}{3}} \|\varphi\|$. Par l'inégalité triangulaire,

$|\varphi(D(2q, r-q)) - \varphi(D(\frac{2r}{3}, \frac{2r}{3}))| \leq 4 \left(e^{-\frac{r}{3}} + e^{-\frac{r-q}{2}} \right) \|\varphi\|$.

On pose $\begin{cases} u = \frac{2r}{3} \\ v = \frac{r}{3} + q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2q = 2v - u \geq 0 \\ r - q = 2u - v \geq 0 \end{cases}$ d'où, si $0 \leq \frac{u}{2} \leq v \leq 2u$,
 $\Rightarrow \frac{1}{2}u \leq v \leq 2u$
 $r > a > 0$

(*) $|\varphi(D(2v-u, 2u-v)) - \varphi(u, u)| \leq 4 \left(e^{-\frac{u}{2}} + e^{-\frac{2u-v}{2}} \right) \|\varphi\|$. Appliquons ceci avec $\check{\varphi}$ et permutons u et v : $|\varphi(D(2v-u, 2u-v)) - \varphi(v, v)| \leq 4 \left(e^{-\frac{v}{2}} + e^{-\frac{2v-u}{2}} \right) \|\varphi\|$.

Par l'inégalité triangulaire : $|\varphi(D(u, u)) - \varphi(D(v, v))| \leq \dots$ avec $\frac{2u}{3} \leq v \leq \frac{3u}{2}$.

Preuve de la prop 5.2 : On voit que $(\varphi(D((\frac{3}{2})^n, (\frac{3}{2})^n))_n$ est une suite de Cauchy.

Elle converge donc vers un $c \in \mathbb{C}$. Soit (u_n) suite de $\mathbb{R}_+$ avec $u_n \rightarrow \infty$, $u_n \uparrow$.

Pour chaque n , existe $\sigma(n)$ tel que $(\frac{3}{2})^{\sigma(n)} \in u_n \leq (\frac{3}{2})^{\sigma(n)+1}$, $\sigma(n) \nearrow$.

Donc $|\varphi \circ D(u_n, u_n) - \varphi((\frac{3}{2})^{\sigma(n)}, (\frac{3}{2})^{\sigma(n)})| \leq 16 e^{-\frac{1}{4}(\frac{3}{2})^{\sigma(n)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Donc $u \mapsto \varphi \circ D(u, u)$ tend vers c en $+\infty$. Si $u \geq 7$, $|\varphi(D(u, u)) - c| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi \circ D(u(\frac{3}{2})^{n+1}, u(\frac{3}{2})^{n+1}) - \varphi \circ D(u(\frac{3}{2})^n, u(\frac{3}{2})^n)|$

$$\text{Or } (\frac{3}{2})^n \geq 1 + \frac{n}{2} \quad |\varphi \circ D(u, u) - c| \leq 16 e^{-\frac{u}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nu}{8}} \quad \text{avec } u \geq 2$$

$$\leq \frac{16}{1 - e^{-\frac{u}{4}}} e^{-\frac{u}{4}}$$

$$\text{Or } \frac{1}{1 - e^{-\frac{u}{4}}} \leq 5 \leq 80 e^{-\frac{u}{4}} \|\varphi\|$$

$n = 2u - u$ est. Puis on applique $(*)$: $|\varphi(2u-u, 2u-u) - \varphi(u, u)| \leq 4(e^{-\frac{2u-u}{2}} + e^{-\frac{u}{2}}) \|\varphi\|$
 $t = 2u - v$

$$\text{et } |\varphi \circ D(s, t) - c| \leq [4(e^{-\frac{2u-v}{2}} + e^{-\frac{u}{2}}) + 80 e^{-\frac{u}{4}}] \|\varphi\|$$

$$u = \frac{s+t}{2}$$

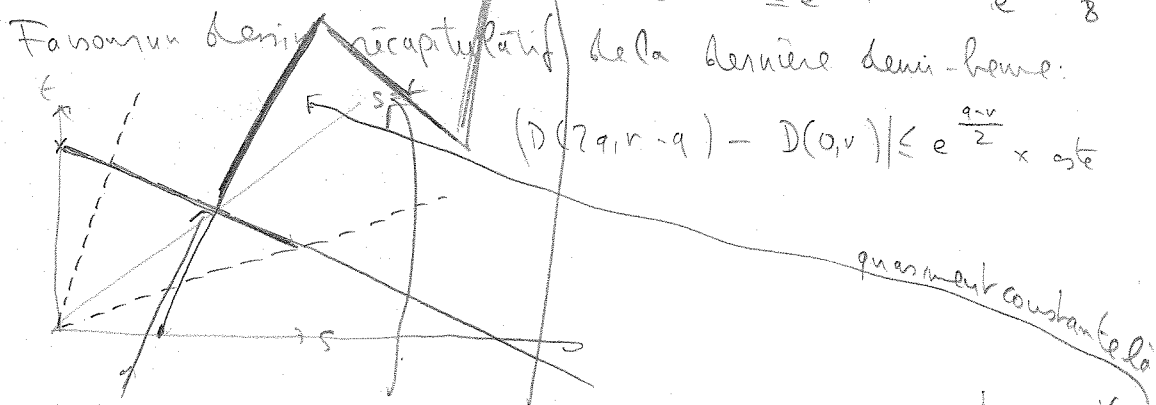
$$v = \frac{s-t}{2}$$

$$[4(e^{-\frac{s-t}{2}} + e^{-\frac{s+t}{4}})] + 80 e^{-\frac{s+t}{8}}$$

$$\leq e^{-\frac{s-t}{4}} \leq e^{-\frac{s-t}{4}} e^{-\frac{s+t}{8}}$$

$$s+t \geq \frac{3}{2}(s+t)$$

Faisons un dessin récapitulatif de la dernière demi-heure:



$$|D(2u, v-u) - D(0, v)| \leq e^{\frac{u-v}{2}} \times \text{cte}$$

ici $\varphi \circ D(s, t)$ est quasiment constante, de même, en passant par e^v , et c .

C'est ainsi que l'on s'approche de l'infini.

(tous les calculs avaient été faits par Laforgue et exprimé par en termes de paires de Gelfand par Haas-De Laet).