Amaury Freslon. 1
23/10/2012

# Groupes quantiques et propriété d'approximation

Def : $A$ est une $C^*$algèbre si c'est une algèbre de Banach involutive telle que $\|x^*x\| = \|x\|^2$.
Th : Si $A$ est unifère et commutative, alors il existe $X$ compact tel que $A \simeq C(X)$.

Si $\Gamma$ groupe discret, $\lambda : \Gamma \longrightarrow B(\ell^2(\Gamma))$
$g \longmapsto (f \longmapsto (h \longmapsto f(g^{-1}h)))$
$C^*_r\Gamma$ est la $C^*$-algèbre engendrée par $\lambda(\Gamma)$.

Groupe q compact : exemple : $O_N$ matrices orthogonales $N \times N$.
$C(O_N) = C^*_{\text{commutative}}((u_{ij})_{1 \leq i,j \leq N} : u_{ij}^* = u_{ij}$ et $[u_{ij}]$ unitaire$)$
$\rightarrow$ on prend les f$^{ns}$ coordonnées et on applique Gelfand.

Notons alors $C(O_N^+) = C^*((u_{ij})_{1 \leq i,j \leq N} : u_{ij}^* = u_{ij}$ et $[u_{ij}]$ unitaire$)$
$C(O_N)$ en est un quotient.

On veut y penser comme à un espace $O_N$ libéré des relations de commutation

$u_{ij}(g \cdot h) = \sum u_{ik}(g) u_{kj}(h)$. On peut réécrire cela ainsi :
$C(O_N) \otimes C(O_N) \simeq C(O_N \times O_N)$ et cela se réécrit $\sum u_{ik} \otimes u_{kj} = \Delta(u_{ij})$.
C'est l'adjoint du produit qd on passe de l'espace aux fonctions.

Pour $O_N^+$, on va faire pareil $\Delta : C(O_N^+) \longrightarrow C(O_N^+) \otimes_{min} C(O_N^+)$
$u_{ij} \longmapsto \sum u_{ik} \otimes u_{kj}$

C'est le coproduit : on a $(\Delta \otimes i) \circ \Delta(u_{ij}) = (i \otimes \Delta) \circ \Delta(u_{ij})$

On peut définir une mesure de Haar !

$h : C(O_N) \longrightarrow \mathbb{C}$
$f \longmapsto \int_{O_N} f \, d\mu$

et l'invariance à gauche s'écrit $\int_{O_N} f(g \cdot h) d\mu(h) = \int_{O_N} f(h) d\mu(h)$

$\Delta(f)(g,h) \simeq (i \otimes h) \circ \Delta(f) = h(f) \cdot 1$

De même l'invariance à droite s'écrit $(h \otimes i) \Delta(f) = h(f) \cdot 1$

<u>Th</u>. (Woronowicz) Un tel état est unique. On l'appelle état de Haar.

Construction GNS : $h$ est une f.l. $\geq 0$ et $h(1) = \|h\| = 1$ : $h(x^*x) \geq 0$.

Considérons le produit scalaire $\langle x, y \rangle = h(x^*y)$ ; on va compléter $(C(O_N^+), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ en $C(O_N^+) \xrightarrow{\Lambda_h}$ "$L^2(O_N^+)$" sur lequel $C(O_N^+)$ agit naturellement : $\pi_h : C(O_N^+) \longrightarrow B(L^2(O_N^+))$

$x \longmapsto \Lambda_h(y) \longmapsto \Lambda_h(xy)$.

Cela donne une rep non universelle : on note $\pi_h : C(O_N^+)) = C_{red}(O_N^+)$

On ~~définit~~ pense ainsi $C(O_N^+)$ comme "dual" d'un groupe discret.

## Propriétés d'approximations.

(1) <u>Moyennabilité</u> : Une $C^*$-algèbre $A$ est moyennable s'il existe $(T_i : A \longrightarrow A)$ telle que

[ $Id : A \longrightarrow A$ est nucléaire, notion qui a un sens en algèbres de Banach. ]

- $rg(T_i)$ fini
- $\|T_i(x) - x\| \longrightarrow 0$
- Les $T_i$ sont unitales c.p. i.e. tous les $T_i^{(n)} : M_n(A) \circlearrowleft$ sont c.p.

Alors $C_r^*(\Gamma)$ est moyennable ssi $\exists$ moyenne invariante sur $l^\infty(\Gamma)$ et $m : l^\infty(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{C}$

C'est une propriété très restrictive. Affaiblissons-la :

ex : Les $SU_q(2)$ : $C_u^*\left(\begin{pmatrix} a & -qb \\ b^* & a^* \end{pmatrix} \text{ unitaires}\right)$ sont moyennables.

(2) <u>Propriété de Haagerup</u> : Il faudra la formuler en termes d'algèbres de von Neumann :

$A$ $C^*$-algèbre munie de l'état $h$ l'a si $\exists T_i : A \longrightarrow A$
- $T_i : L^2(A, h) \circlearrowleft$ compacts.
- $\|T_i(x) - x\| \longrightarrow 0$
- $T_i$ sont u.c.p.

Un des intérêts : implique Baum-Connes

Th (Michael Brannan) $(C_{red}(O_N^+), h)$ a la propriété de Haagerup sans être moyennable.

(3) <u>Moyennabilité faible</u> : Une $C^*$-algèbre est w-moyennable si $\exists T_i : A \longrightarrow A$

- $rg\, T_i < \infty$
- $\|T_i(x) - x\| \longrightarrow 0$
- $\overline{\lim}\, \|T_i\|_{cb} < \infty$ l'infimum de cette quantité va nous fournir un invariant numérique noté $\Lambda_{cb}(A)$ et appelé constante de Cowling-Haagerup.

Ex : si $n \neq n'$, $\Gamma_1$ réseau dans $Sp(n,1)$ $C_r^*(\Gamma_1)'' = L\Gamma_1 \subset B(\ell^2(\Gamma_1))$

$\Gamma_2$ —— $Sp(n',1)$ $C_r^*(\Gamma_2)'' = L\Gamma_2 \subset B(\ell^2(\Gamma_2))$

et Cowling-de-Cannière ont montré que $\Lambda_{cb}(C_r^*(\Gamma_1)) = 2n-1$ !

Popa-Vaes-Peterson $\rightarrow$ propriété de malléabilité / rigidité.

Cela permet de définir que :

Déf : $\widehat{\mathbb{G}}$ est faiblement moyennable s'il existe une suite (gén) $(a_i)$ dans $\ell^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ telle que
(Haagerup-Cowling)

- supp $a_i$ est fini pour chaque $i$
- $a_i \longrightarrow 1$ ponctuellement
- $\overline{\lim}\ \|m_{a_i}\|_{cb} < \infty$

La $\overline{\lim}$ minimale est notée $\Lambda_{cb}(\widehat{\mathbb{G}})$ et est appelée constante de Cowling-Haagerup de $\widehat{\mathbb{G}}$.

Théorème : La constante $\Lambda_{cb}(\widehat{\mathbb{G}}) = \Lambda_{cb}(C_{red}(\widehat{\mathbb{G}})) = \Lambda_{cb}(L^\infty(\mathbb{G}))$
(Kraus-Ruan, Freslon)

Déf : $\widehat{\mathbb{G}}$ a Haagerup si ——————————————— telle que

- $a_i \in C_0(\widehat{\mathbb{G}})$
- $a_i \longrightarrow 1$ ponctuellement
- $m_{a_i}$ u.c.p $\forall i$

⚠ un gqd n'est pas nécᵗ unimodulaire → avN peut être de type III
→ il faudra dire " ~~Haar~~ a la propriété de Haagerup « relativement à l'état de Haar »"

Théorème (Freslon) Si $\Lambda_{cb}(\widehat{\mathbb{G}}) = 1 = \Lambda_{cb}(\widehat{\mathbb{H}})$, alors $\Lambda_{cb}(\widehat{\mathbb{G}} * \widehat{\mathbb{H}}) = 1$.

N.B. : on utilise le critère de Gilbert ds le cas des groupes discrets et la généralisation par Daws n'est pas complète. Donc on ne sait pas jusqu'où on peut généraliser ce théorème.

# I Exemple essentiel : les groupes quantiques libres.

$$C(O_N) = C^*\Big(\underset{\text{commutative}}{\overset{\text{par générateurs}}{(u_{ij})_{1\le i,j\le N}}} : \underbrace{\text{la matrice } [u_{ij}] \text{ est unitaire et } u_{ij}^* = u_{ij}}_{\text{rel entre générateurs}}\Big)$$

$$C(O_N^+) = C^*\big((u_{ij})_{1\le i,j\le N} : [u_{ij}] \text{ unitaire et } u_{ij}^* = u_{ij}\big)$$

a un quotient non trivial, $C(O_N)$
et $C(O_N)$ est l'abélianisé de $C(O_N^+)$

on appelle ça le groupe q libre orthogonal [Banica].
"libéré des relations de commutation".

On a aussi : $C(O_N^+) \longrightarrow C^*((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*N})$ en quotientant par les coeffs non diagonaux.

N.B. : On peut aussi définir $C(O^+(F))$ en remplaçant $u_{ij}^* = u_{ij}$ par $F^{-1}[u_{ij}^*]F = [u_{ij}]$.

On définit le coproduit par $\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=0}^{N_1} u_{ik} \otimes u_{kj}$

[cf : sur un groupe, $\Delta(u_{ij}) : (g,h) \longmapsto u_{ij}(gh) = \sum u_{ik}(g)\, u_{kj}(h)$ ]

On sait déjà plein de choses : exact, BC, facteur

Ex : $N=2$ : c'est $SU_{-1}(2)$ : Dire que $\begin{bmatrix} a & -b \\ b^* & a^* \end{bmatrix}$ est unitaire, c'est définir $SU(2)$ : commutativité gratuite.

Puis Woronowicz a défini $SU_q(2)$ : $\begin{bmatrix} a & -qb \\ b^* & a^* \end{bmatrix}$ unitaire.

Th [Banica] $\mathrm{Irr}(O_N^+) \simeq \mathbb{N}$. $u^0 =$ triviale ; $u^1 = [u_{ij}]$

(en fait, la déf de $\Delta(u_{ij})$ exprime que $[u_{ij}]$ est une rep.)

et $u^1 \otimes u^n = u^{n+1} \oplus u^{n-1}$ [Ce sont les règles de fusion de $SU(2)$ !]

Def : $\mu_0(X) = 1$, $\mu_1(X) = X$, $\mu_1(X)\mu_k(X) = \mu_{k+1}(X) + \mu_{k-1}(X)$
définit une suite de polynômes. $\rightarrow$ polynômes de Tchebychev.

Michael Brannan : posons $b_k(t) = \frac{\mu_k(t)}{\mu_k(N)}$ et $a(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(t)\, p_k \in \ell^\infty(\mathbb{F}O_N^+)$

~~décroît~~ $|<(\frac{t}{N})^k$
décroît $\exp^t$

où on écrit $\ell^\infty(\mathbb{F}O_N^+) = \prod_{k=0}^{\infty} B(H_k)$.

<u>Th</u> : Les $a(t)$ satisfont les hypothèses de la propriété de Haagerup.

Ce qui est technique : vérifier qu'ils sont ucp.

Tronquons : $a_i(t) = \sum_{k=0}^{i} b_k(t)\, p_k$. Quelle est leur norme c.b ?!

$\| m_{a}(t) - m_{a_i}(t) \|_{cb} \leq \sum_{i+1}^{\infty} |b_k(t)|\, \| m_{p_k} \|_{cb} \leq K \sum_{i+1}^{\infty} (\frac{t}{N})^k \| m_{p_k} \|_{cb}$.

<u>Théorème</u> (Freslon) : Il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\| m_{p_d} \|_{cb} \leq P(d)$.

(sans cb, cela résulte immédiatement de la décroissance rapide).

(avec, cf Pisier [Haagerup non publié]) On sait faire $P(d) = K(N) \times (2d+1) \times (d+1)$
et on sait que $\| m_{p_d} \|_{cb} \geq \frac{d+1}{3}$

Toute l'inspiration de la preuve : Haagerup–Pisier :

$H$ e.H, $X \in B(H) \otimes \cancel{C(G)}$ $\otimes \mathrm{Pol}(G)$ algèbre des coefficients des irréductibles.

$$X^d = (i \otimes m_{p_d})(X)$$

$L^2(G) \simeq \bigoplus_k B(H_k)$ où $\langle A, B\rangle_k = \dfrac{\mathrm{Tr}(A^*B)}{\dim k}$ [ici, pas besoin de trace !].

Prenons donc deux entiers $a$ et $b$ et $B_{a,b}(X^d) = (i \otimes p_a) X^d (i \otimes p_b)$

$: H \otimes B(H_b) \longrightarrow H \otimes B(H_a)$.

<u>Prop</u> : $X^d = \sum_{j=0}^{d} X_j^d$ avec $X_j^d = \sum_{k=0}^{+\infty} B_{d-j+k,\, j+k}(X^d)$

Ex : supp $f \subset W_d$, $g \in C_c(\mathbb{F}_N)$, $f * g(x) = \sum_{yz=x}' f(y) g(z)$

combien de lettres simplifiées ici ?

$$= \sum_{j=0}^{d}{}' \sum_{\substack{yz=x \\ |x| = |y| + |z| - j}}' f(y) g(z) \quad \text{Notons } |z| = j+k$$

$$= \sum_{j=0}^{d}{}' \Big( \sum_{k=0}^{\infty}{}' f * (g \chi_{j+k}) \Big)_{(W_{d-j+k})} (x).$$

Or règle de fusion : $X^d = \sum_{a,b}' B_{a,b}(X^d)$ ;

$$X = \sum' T_i \otimes u_{p,q}^{\ell(i)} \; ;$$

$(i \otimes m_{p_d})(X) = \sum' T_i \otimes u^d_{p_i, q_i}$ où $u^d_{p,q} \curvearrowright B(H_k) \dots \bigoplus_{s=0}^{\min(d,k)} B_{d+k-2s}$

On a réduit le pb : de plus, les $B_{d-j+k,\, j+k}$, $k = 0 \dots \infty$, sont $\perp$ dans $k = |d-k| \oplus |d-k+2| \dots \oplus d+k$.

<u>Prop</u> : il existe des coefficients $\chi_j^d(k) > 0$ tels que $\|B_{d-j+k,\, j+k}(X^d)\| \le \chi_j^d(k) \|B_{d-j,j}(X^d)\|$

on surseoit ici ; on ne sait pas si on peut avoir $\chi_j^d < 1$, mais on verra qu'ils sont uniformément bornés.

<u>Cor</u> : $\|X_j^d\| \le K(N) \|B_{d-j,j}(X^d)\|$ pour une constante qui ne dépend que de $N$.

On va obtenir la majoration polynomiale par récurrence.

Prop : $\exists\, C_j^d(s)$ tels que $\|B_{d-j+1,\, j+1}(X^{d+2})\| \le 3\|X\| + \sum_{s=0}^{\min(j,d-j)} \|B_{d-j+1,\, j+1}(X^{d-2s})\| \times C_j^d(s)$.

Notons $H(d)$ " $\forall \ell \le d \;\forall 0 \le j \le \ell \;\; \|B_{\ell-j,j}(X^\ell)\| \le (2\ell+1)\|X\|$ "

$\|B_{d-j+1,\, j+1}(X^{d-2s})\| = \|B_{(d-2s)-(j-s)+s+1,\, (j-s)+s+1}(X^{d-2s})\| \le \chi_{j-s}^{d-2s}(s+1)\, Q(d) \|X\|$.

et $\|B_{d-j+1,\, j+1}(X^{d+2})\| \le \Big(3 + Q(d) \underbrace{\sum_{s=0}^{\min(j,d-j)} C_j^d(s)\, \chi_{j-s}^{d-2s}(s+1)}_{\text{miracle, c'est } \le 1 \,!!}\Big) \|X\|$

d'où $\|B_{d-j+1,\, j+1}(X^{d+2})\| \le Q(d+2) \|X\|$.

$q+q^{-1}=N$. $D_k$ = dim q. de la $k^e$ irréductible de $SU_q(2) = \dfrac{q^{k+1}-q^{-k-1}}{q-q^{-1}}$

Soit $N_{a,b}^c = 1 - \dfrac{D_{\frac{a-b+c}{2}} D_{\frac{-a+b+c}{2}-1}}{D_{a-1} D_b}$. $K_j^d(k) = \sqrt{\dfrac{D_{d-j} D_{j+k}}{D_{d-j+k} D_j}} \prod \left(N^{d-j+k}_{d-j+i,k+i}\right)^{-1}$

$$C_j^d(s) = 1 - \prod_{i=0}^{j-s-1} \frac{N^{d-j+1}_{d-j-s+i,s+i-1}}{N^{d-j}_{d-j-s+i,s+i}}.$$

Prop : Il existe $C_j^d(s)$ tel que $\| B_{d-j+1,j+1}(X^{d+2}) \| \leq 3 \| X \| + \sum_{s=0}^{\min(j,d-j)} \| B_{d-j+1,j+1}(X^{d-2s}) \| C_j^d(s)$

On va comparer $B_{d-j+1,j+1}(X)$ et $B_{d-j,j}(X)$. "enlever une lettre, puis la remettre" $Q(X)=2X+1$.

$\delta_a^{b,c} : H_a \longrightarrow H_b \otimes H_c$ morphisme isométrique
on va noter "$a \subset b \otimes c$"
sur $L^2(G) = \bigoplus B(H_k)$.

$x$ coeff de $u^d$, $\xi \in B(H_j)$

$$x \cdot \xi = \sum_{t \subset d \otimes j} (\delta_t^{d,j})^* (x \otimes \xi)$$

$\to$ calcul de Wronowicz

$$x \otimes \xi \in \bigoplus_{t \subset d \otimes j} B(H_t)$$

$M_1^{+*}$ : $\otimes B(H_{j+1}) \longrightarrow B(H_j) \otimes B(H_1)$

"$M_1^+$" : $B(H_{d-j}) \otimes B(H_1) \longrightarrow B(H_{d-j+1})$

$x \otimes y \longmapsto \left(\delta^{d-j,1}_{d-j+1}\right)^* (x \otimes y)\, \delta^{d-j,1}_{d-j+1}$

Le vrai $M_1^+$ fera $M_1^+ : L^2(G) \otimes B(H_1) \longrightarrow L^2(G)$

Prop : $B_{d-j+1,j+1}(X) - \underbrace{(i \otimes M_1^+)(B_{d-j,j}(X) \otimes 1)(i \otimes M_1^+)^*}_{\text{c.p. !!}}$

$=$ (ds le cas Haagerup, le bbc $d+2$)

$$= B_{d-j+1,j+1}(X^{d+2}) + \underbrace{\sum_{s=0}^{\min(j,d-j)} B_{d-j+1,j+1}(X^{d-2s}) C_j^d(s)}_{\text{dû au quantique.}}$$

Preuve : en dimension 1 : $X = \sum x^\ell$ $\leftarrow$ coeff de $u^\ell$, $\xi \in B(H_{j+1})$

$$B_{d-j+1,j+1}(x^\ell) \cdot \xi = \left(\delta^{\ell,1}_{d-j+1}\right)^* (x \otimes \xi) \left(\delta^{\ell,1}_{d-j+1}\right)$$

$(i \otimes M_1^+)(B_{d-j,j}(x^\ell) \otimes i)(i \otimes M_1^+)^* = V^*(x \otimes \xi) V$ où $V$ est produit de trois unitaires : $V = (i \otimes \delta^{j,1}_{j+1})^* \circ (\delta^{\ell,j}_{d-j} \otimes i) \cdot \delta^{d-j,1}_{d-j+1}$ et c'est un entrelacem:
$\in \mathrm{Mor}(d-j+1, \ell \otimes (j+1))$
or de dimension 1 : il existe donc (coliméarité !) un $\nu_j^d(s) \in \mathbb{C}$
multiplicité 1 !!
tel que $V = \nu_j^d(s)\, \delta^{\ell,1}_{d-j+1}$ et $A = |\nu_j^d(s)|^2 B$

→ calcul de 6j-symbols (thèse de R. Vergnioux). $\begin{Bmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{Bmatrix}$.

→ règles de fusion des rep., $\times^{\text{ité}}$ des morphismes

Si $l > d+2$, $A = B = 0$ | Dans les autres cas, $l = d-2s$

Si $l = d+2$, $A = 0$ | et $C_j^d(s) = 1 - |z_j^d(s)|^2$

$\| B_{d-j-1, j-1}(X^{d+2}) \| \leq 3\|X\|$ car $\| i \otimes \eta_1^+ \|^2 < 2$

$+ \sum_j |C_j^d(s)| \, \| B_{d-j+1, j-1}(X^{d-2s}) \|$.

$(1 \otimes 1) \otimes 1 = (0 \oplus 2) \otimes 1$

$= \underbrace{1 \oplus 1} \oplus 3$ puis calcul d'angles entre sous-espaces.

équivalence monoïdale.