

Articles récents sur le théorème de Grothendieck [GT]

Il s'agit toujours de formes bilinéaires sur un produit.

Cas commutatif: Soit $u: C(S) \times C(T) \rightarrow \mathbb{C}$ bilinéaire. Alors il existe deux probabilités μ sur S et ν sur T telles que $|u(x, y)| \leq K \|u\| \left(\int_S |x|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_T |y|^2 d\nu \right)^{\frac{1}{2}}$
 $\uparrow$
 "constante de Grothendieck"

K est différente dans le cas réel et complexe. On ne connaît pas encore sa valeur exacte.

Autre version: à u est associée $\tilde{u}: C(S) \rightarrow C(T)^*$ et l'inégalité s'interprète comme factorisation de $\tilde{u}: C(S) \rightarrow C(T)^*$ et $\|\alpha\| \|\beta\| \leq K \|\tilde{u}\|$.

Où: on a des $x_i \in C(S)$ et des $y_i \in C(T)$, $\sum |u(x_i, y_i)| \leq C \sum \left(\int_S |x_i|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_T |y_i|^2 d\nu \right)^{\frac{1}{2}}$
 (Cauchy-Schwarz)
 et $\sum$ est borné par $\left(\sum \int_S |x_i|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum \int_T |y_i|^2 d\nu \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \sum |x_i|^2 \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \sum |y_i|^2 \right\|^{\frac{1}{2}}$

On aboutit ainsi à la version $|\sum u(x_i, y_i)| \leq C \left\| \sum |x_i|^2 \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \sum |y_i|^2 \right\|^{\frac{1}{2}}$

La réciproque s'obtient par un Hahn-Banach non trivial.

N.B.: dans la 1^{re} version, μ et ν sont des formes linéaires positives de norme 1 sur une C^* -algèbre: ce sont des états.

Cas non commutatif: A, B deux C^* -algèbres: soit $u: A \times B \rightarrow \mathbb{C}$. On étudie l'inégalité
 (*) pour des $x_i \in A$, des $y_i \in B$: $|\sum u(x_i, y_i)| \leq C \left(\underbrace{\left\| \sum x_i x_i^* \right\|_A}_{\left\| (x_i) \right\|_A^2} + \underbrace{\left\| \sum x_i^* x_i \right\|_A}_{\left\| (x_i) \right\|_A^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\underbrace{\left\| \sum y_i y_i^* \right\|_B}_{\left\| (y_i) \right\|_B^2} + \underbrace{\left\| \sum y_i^* y_i \right\|_B}_{\left\| (y_i) \right\|_B^2} \right)^{\frac{1}{2}}$

Autre version: il existe des états ϕ_1, ϕ_2 sur A et ψ_1, ψ_2 sur B tels que

$$(T) \quad |u(x, y)| \leq C \left[\phi_1(x x^*) + \phi_2(x^* x) \right]^{\frac{1}{2}} \left[\psi_1(y^* y) + \psi_2(y y^*) \right]^{\frac{1}{2}}$$

On a bien (*) par Cauchy-Schwarz.

Voici une preuve de (*): Il faut un cône et donc linéariser le membre de droite:

⊙ implique que $\sum |u(x_i, y_i)| \leq \frac{C}{2} \left[\left\| (x_i) \right\|_A^2 + \left\| (x_i) \right\|_A^2 + \left\| (y_i) \right\|_B^2 + \left\| (y_i) \right\|_B^2 \right]^{\frac{1}{2}}$. Or, si $x \in A$,

$\|x\| = \sup \{ |\varphi(x)| : \varphi \in A^*, \|\varphi\| = 1 \} = \sup \{ \varphi(x) : \varphi \text{ état} \}$. Notons S_A l'ensemble des états sur A .

N.B.: si A est un file , S_A est convexe et compact. Aussi, introduisons la fonction

$$f_{(x_i), (y_i)}(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2) = \frac{C}{2} \left[\varphi_1 \left(\sum x_i x_i^* \right) + \varphi_2 \left(\sum x_i^* x_i \right) + \psi_1 \left(\sum y_i^* y_i \right) + \psi_2 \left(\sum y_i y_i^* \right) \right] - \sum_i |u(x_i, y_i)|$$

Alors la famille de tels fonctions continues sur $S_A^2 \times S_B^2$, indexée par $(x_i), (y_i)$, est un cône C^+ .

De plus, chaque fonction a un maximum positif ou nul.

Soit C_- la famille des fonctions < 0 sur $S_A^2 \times S_B^2$. C'est un cône disjoint du premier.

Par Hahn-Banach, il existe φ forme linéaire sur $C(S_A^2 \times S_B^2)$ telle que

$$\sup_{f \in C_-} \varphi(f) \leq \inf_{f \in C_+} \varphi(f). \text{ Comme } 0 \in C_+, \sup_{f \in C_-} \varphi(f) \leq 0. \text{ Donc } \varphi \geq 0.$$

En normalisant φ , on obtient un état, donné par une probabilité μ sur $S_A^2 \times S_B^2$:

$$\int_{S_A^2 \times S_B^2} f_{x,y}(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2) d\mu \geq 0, \text{ i.e. } |u(x,y)| \leq \frac{C}{2} \left[\int_{S_A^2 \times S_B^2} \varphi_1(x x^*) d\mu(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2) + \dots \right]$$

$\frac{C}{2} [\dots]$ qui se réécrit en $\frac{C}{2} \left(\int_{S_A^2 \times S_B^2} \varphi_1 d\mu(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2) \right) (x^* x) + \dots = \frac{C}{2} [f_1(x^* x) + f_2(x x^*) + g_1(y y^*) + g_2(y y^*)]$

Pour finir, on optimise l'inégalité en notant que $u(x,y) = u(x, \frac{y}{\|y\|})$. Donc on borne

$$|u(x,y)| \leq \frac{C}{2} \left[\epsilon^2 (f_1(x^* x) + f_2(x x^*)) + \frac{1}{\epsilon^2} (g_1(x^* x) + g_2(x x^*)) \right] \text{ et l'inf}_{\epsilon > 0} = C \left[\frac{f_1(x^* x) + f_2(x x^*)}{4} + \frac{g_1(x^* x) + g_2(x x^*)}{4} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Article de Roger et Vidick : motivation : on s'intéresse à la constante C optimale nulle, dans l'non-commutatif

$$|\sum u(x_i, y_i)| \leq \frac{C'}{2} \max(\|x_i\|_R^2 + \|t_i x_i\|_C^2, \|y_i\|_C^2 + \|y_i\|_R^2)$$

GT non-commutatif : Si $u: A \times B \rightarrow \mathbb{C}$, $\|u\|_{nc} \leq 2\|u\|$. (m.b.: $\|u\| \leq \|u\|_{nc}$)

Ce théorème est dû à Pisier (constante différente, u "approachable" par des f.b.l. finies) puis Haagerup

GT pour les espaces d'opérateurs : A, B C^* -algèbres, $E \subset A, F \subset B, u: E \times F \rightarrow \mathbb{C}$.

On veut étudier $|\sum u(x_i, y_i)| \leq C \left[\|x_i\|_R^2 + \|(t_i x_i)\|_C^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\|(t_i^{-1} y_i)\|_R^2 + \|y_i\|_C^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ pour des $x_i \in E, y_i \in F, t_i > 0$, sous cette version, on veut :

$$|u(x,y)| \leq C \left(\left[f_1(x x^*) g_2(y^* y) \right]^{\frac{1}{2}} + \left[f_2(x^* x) g_1(y y^*) \right]^{\frac{1}{2}} \right)$$

on ne garde que 2 termes mixtes / 4 termes, plus haut.

Alors $\Downarrow$ se démontre ainsi : $|u(x,y)| \leq \frac{C}{2} [f_1(x x^*) + f_2(t^2 x^* x) + g_1(t^{-2} y y^*) + g_2(y^* y)]$

Multiplions x par λ et y par λ^{-1} et optimisons : $\leq \frac{C}{2} ([f_1(x x^*) + f_2(t^2 x^* x)] [g_1(t^{-2} y y^*) + g_2(y^* y)])^{\frac{1}{2}}$

Développons : $\frac{C}{2} (f_1(x x^*) g_2(y^* y) + f_2(x^* x) g_1(y y^*) + t^2 f_1(x x^*) g_2(y y^*) + t^{-2} f_2(x^* x) g_1(y^* y))$

et prenons l'inf sur tous les t : on obtient un carré parfait ! $2[f_1(x x^*) g_2(y^* y) f_2(x^* x) g_1(y y^*)]$

Roger et Vidick s'intéressent à $|\sum u(x_i, y_i)| \leq \frac{C'}{2} \max(\|x_i\|_R^2 + \|t_i x_i\|_C^2, \|t_i^{-1} y_i\|_R^2 + \|y_i\|_C^2)$ $\hookrightarrow$ constante optimale notée $\|u\|_{os}$.

GT pour les espaces d'opérateurs : si $u: A \times B \rightarrow \mathbb{C}$ est telle que $\tilde{u}: A \rightarrow B^*$ soit c.b., alors $\|u\|_{os} \leq 2\|\tilde{u}\|_{cb}$. [On va noter $\|\tilde{u}\|_{cb} = \|u\|_{j.c.b.}$]. [Pisier - Shlyakhtenko]
 On a trivialement $\|u\|_{j.c.b.} \leq \|u\|_{os}$. [Haagerup - Musat]
 m hypothèse d'approchabilité

Les preuves sont très différentes :

- Pisier - Shlyakhtenko : passe les gaussiennes libres dans L^∞ , $\leq$ libre nc
- Haagerup - Ruskai : réduit l'inégalité à GT classique n.c par l'usage des algèbres d'Araki-Woods.

Regev et Vidossich utilisent du calcul matriciel élémentaire et explicite en montrant que l'étude de $\|u\|_{\text{nc}}$ se réduit à $\|u\|_{\text{nc}}$.

Théorème [Regev-Vidossich] : Soit $u: E \times F \rightarrow \mathbb{C}$ bilinéaire, $d \geq 1$, des $x_i \in E$ et $y_i \in F$ et $\epsilon_i > 0$. Alors il existe des $\tilde{x}_i$ dans $M_d(E) = E \otimes M_d$, $\tilde{y}_i \in F \otimes M_d$ et un $\Phi \in \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$, $\|\Phi\| = 1$ tels que $\|\tilde{x}_i\|_R \leq \|(x_i)\|_R$ et de même pour les y_i , et

$$|\langle \Phi, \sum_i u_d(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \Phi \rangle| \geq |\sum u(x_i, y_i)| - C \frac{\ln(1 + \max(\epsilon_i, \epsilon_i^{-1}))}{1 + \ln d} \sum |u(x_i, y_i)|$$

où $u_d: M_d(E) \times M_d(F) \rightarrow M_d = M_d \otimes M_d = B(\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d)$ "on superpose 2 matrices"

$$(x_{ij}, (y_{kl})) \mapsto (u(x_{ij}, y_{kl}))_{(i,k), (j,l)}$$

Ici, les norms sur $\otimes$ sont les seuls norms naturels, les $\otimes_{\min}$.

N.B. : $\|u\|_{\text{nc}} = \|u\|_{\text{nc}} = \sup_d \|u_d: M_d(E) \times M_d(F) \rightarrow M_d \otimes M_d\|$.

Ce théorème est purement algébrique, matricielle, et suppose GT nc.

Soit $\epsilon > 0$: $\exists (x_i), (y_i), (t_i) \quad \sum |u(x_i, y_i)| \geq (1 - \epsilon) \|u\|_{\text{nc}}$.

Or $\sum |u(x_i, y_i)| \leq \|u\|_{\text{nc}}$. Le terme devant tend vers 0. Or est quelconque et le terme $\rightarrow 0$.

Le membre de gauche $|\langle \Phi, \sum \Phi \rangle|$: on compose u_d avec $\langle \Phi, \cdot \rangle$, l'endomorphisme défini par Φ ; cela donne une nouvelle f. $f: \mathcal{L}_{u_d} M_d(A) \times M_d(B) \xrightarrow{u_d} M_d \otimes M_d \xrightarrow{\langle \Phi, \cdot \rangle} \mathbb{C}$

Donc est majoré grâce au GT nc par $\|u_d\|_{\text{nc}}$. Donc $\|u\|_{\text{nc}}$ est borné par le même terme que $\|u_d\|_{\text{nc}}$: $\|u_d\|_{\text{nc}} \leq 2\|u_d\|$ par le GT nc. $\leq 2\|u_d\| \leq 2\|u\|_{\text{nc}}$.

cf une version de GT par Jung-Pisier.