

12/11/2012

La version de Roger et Vidick du T6.

Théorème. Soit $d \geq 1$, $(x_i) \in E$, $(y_i) \in F$, $(t_i) \in \mathbb{R}_+$, alors il existe
 il existe $\Phi \in C^d \otimes C^d_{\text{fin}}$ $(\tilde{x}_i) \in \Pi_d(E)$, $(\tilde{y}_i) \in \Pi_d(F)$ tels que $\|(\tilde{x}_i)\|_2 \leq \|(x_i)\|_2$, $\|(\tilde{y}_i)\|_2 \leq \|(y_i)\|_2$
 et de même pour les y_i , et qu'on ait $\langle \Phi, \sum u_d(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \Phi \rangle \geq \sum |u(x_i, y_i)| -$
 $- C \frac{\ln(1 + \max(t_i, t_i^{-1}))}{1 + \ln d} \sum |u(x_i, y_i)|$

Lemme : $\forall d \geq 1 \forall \epsilon > 0 \exists L(t) \in \Pi_d$ à coeff' positifs tels que

① la somme de chaque ligne est ≤ 1

② ————— colonne est $\leq \epsilon^2$

③ $\exists z \in C^d \|z\|=1 \quad t \geq \langle z, L(t)z \rangle \geq t \left(1 - C \frac{\ln(1 + \max(t, t^{-1}))}{1 + \ln d} \right)$

Dém : On pose $L(t)_{ij} = |\mathbb{J}[i-1, i] \cap \mathbb{J}[(j-1)t^2, jt^2]|$: $L(t)_{ij} \in [0, 1]$
 et ① et ② sont vérifiés. Pour tout $z \in C^d, \|z\|=1$, on a $|\langle z, L(t)z \rangle| = |\sum_i L(t)_{ii} \bar{z}_i z_i|$

Par Cauchy-Schwarz, ceci est borné par $(\sum_i |z_i|^2 \sum_j L(t)_{ij})^{\frac{1}{2}} (\sum_j |z_j|^2 \sum_i L(t)_{ij})^{\frac{1}{2}}$

On a la majoration. Pour la minoration : posons $z_d = \frac{1}{Z_d^{1/2}} (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{d}})$ avec

$$Z_d = \sum_{i=1}^d \frac{1}{i^2} \leq 1 + \ln d. \quad \langle z_d, L(t)z_d \rangle = \frac{1}{Z_d} \sum_{i,j=1}^d \frac{|\mathbb{J}[i-1, i] \cap \mathbb{J}[(j-1)t^2, jt^2]|}{\sqrt{i} \sqrt{j}}$$

$$\frac{z_0}{(j-1)t^2} \quad \frac{z_{i-1}}{i^2}$$

(en supposant $t \leq 1$)

$$= \frac{1}{Z_d} \sum_{j=1}^d \frac{1}{\sqrt{j}} \sum_{i=1}^j \frac{1}{\sqrt{i}} \int_{(j-1)t^2}^{jt^2} \frac{dr}{\sqrt{r} \sqrt{\frac{r}{i^2}}} \quad \text{on compte le } \#i: \mathbb{J}[i-1, i] \text{ rencontre } \mathbb{J}[(j-1)t^2, jt^2]$$

$$= \frac{1}{Z_d} \int_0^{jt^2} \frac{dr}{\sqrt{r} \sqrt{\frac{r}{i^2}}} \sum \left\{ \frac{1}{\sqrt{j}} : (j-1)t^2 < r \leq jt^2 \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} j-1 < \frac{r}{t^2} \leq j \\ \text{on a une seule valeur de } j \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{Z_d} \int_0^{jt^2} \frac{dr}{\sqrt{r} \sqrt{\frac{r}{i^2}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{i^2}}}$$

De même, si $t > 1$, on a $\langle z_d, L(t)z_d \rangle = \frac{1}{Z_d} \int_0^{\min(1, t^2)} \frac{dr}{\sqrt{r} \sqrt{\frac{r}{i^2}}}$

Resumé : $\langle z_d, L(t)z_d \rangle = \frac{1}{Z_d} \int_0^{\min(1, t^2)} \frac{dr}{\sqrt{r} \sqrt{\frac{r}{i^2}}}$

Estimation:
$$> \frac{1}{z_d} \int_0^{d+1+t^2} \frac{dr}{\sqrt{1+r} \sqrt{1+\frac{r}{t^2}}} = \frac{t}{z_d} \int_0^{d+1+t^2} \frac{dr}{\sqrt{1+r} \sqrt{t^2+r}}$$

N.B.:
$$\left[\ln(\sqrt{1+r} + \sqrt{t^2+r}) \right]' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+r} \sqrt{t^2+r}}$$

Donc le lemme précédent $= \frac{zt}{z_d} \ln(\sqrt{1+r} + \sqrt{t^2+r}) \Big|_{r=0}^{d+1+t^2} = \frac{zt}{z_d} [\ln(\sqrt{1+d+1+t^2} + \sqrt{t^2+d+1+t^2}) - \ln(1+t)]$

Si $t \geq 1$, cela est $\geq \frac{zt}{1+0+d} [\ln(\sqrt{1+d} + \sqrt{t^2+d}) - \ln(1+t)]$

$$\approx \frac{zt}{1+\ln d} (\ln d) [\ln(\sqrt{1+\frac{1}{d}} + \sqrt{1+\frac{t^2}{d}}) - \ln(1+t)]$$

et le facteur tend vers 1 uniformément avec t

On va alors considérer $\tilde{\pi}_j = \pi_i \otimes L_r(t_i)$

Lemme: $\forall d \geq 1, \exists \phi \in \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d \forall t > 0 \exists L_r(t) \in M_d, 1 \leq r \leq d^2$

$$\sum_{r=1}^{d^2} L_r(t) L_r(t)^* \leq I_d$$

$$\sum_{r=1}^{d^2} L_r(t)^* L_r(t) \leq t^2 I_d$$

$$|\langle \phi, \sum_{r=1}^{d^2} L_r(t) \otimes L_r(t) \phi \rangle| \leq t C_t$$

Le vecteur ϕ est bien connu en information quantique - maximum entanglement:

Dem.
$$L_{(i+j(d-1))}(t) = \sqrt{L(t)}_{ij} e_{ij} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \sqrt{L(t)}_{ij} \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Alors
$$\sum_{r=1}^{d^2} L_r(t) L_r(t)^* = \sum_{i,j} L(t)_{i,j} e_{ij} e_{ij}^* = \sum_i (\sum_j L(t)_{i,j}) e_{ii} \leq I_b$$

On va poser $\phi = \phi_d = \frac{1}{z_d} \sum_{i,j} \frac{1}{\sqrt{ij}} e_i \otimes e_j$ et $\phi_d = \sum_i \alpha_i e_i \otimes e_i, z = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$

$$\langle \phi, \sum_{r=1}^{d^2} L_r(t) \otimes L_r(t) \phi \rangle = \sum_{i,j} L(t)_{i,j} \langle \phi, e_{ij} \otimes e_{ij} \phi \rangle$$

$$= \sum_{i,j} L(t)_{i,j} \langle \phi, e_{ij} \otimes e_{ij} \phi \rangle = \sum_{i,j} L(t)_{i,j} \langle \phi, e_{ij} \otimes e_{ij} \phi \rangle$$

Démonstration du Théorème: $\tilde{\pi}_j = \pi_i \otimes L_r(t_i)$ ou $j = (i, r)$

$$y_j = \epsilon_i^{-1} y_i \otimes L_r(t_i)$$

$$\sum_j \tilde{\pi}_j^* \tilde{\pi}_j = \sum_i \sum_r \pi_i^* \pi_i \otimes L_r(t_i) L_r(t_i)^* = \sum_i \pi_i^* \pi_i \otimes \sum_r L_r(t_i) L_r(t_i)^*$$

$$\sum_j \tilde{\pi}_j^* \tilde{\pi}_j = \sum_i y_i^* y_i \otimes \epsilon_i^{-2} \sum_r L_r(t_i) L_r(t_i)^* \quad [\| (y_i) \|_2 \leq \| (\epsilon_i^{-1} y_i) \|_2]$$

$$\leq \sum_i \epsilon_i^{-2} y_i^* y_i$$

3^e propriété: $\langle \phi, \sum_j u_j(\tilde{\pi}_j, y_j) \phi \rangle = \langle \phi, \sum_i \sum_r \epsilon_i^{-1} u(\pi_i, y_i) L_r(t_i) \otimes L_r(t_i) \phi \rangle$

$$= \langle \phi, \sum_i \sum_r \epsilon_i^{-1} u(\pi_i, y_i) L_r(t_i) \otimes L_r(t_i) \phi \rangle = \sum_i u(\pi_i, y_i) \epsilon_i^{-1} \langle \phi, L_r(t_i) \otimes L_r(t_i) \phi \rangle \approx \sum_i u(\pi_i, y_i)$$

Considérons $u: E \times F \rightarrow \mathbb{C}$ On a déjà vu que $E=A, F=B$ en utilisant le théorème de Haagerup $\|u\|_{hc} \leq 2\|u\|$.

Rappel: $\|u\|_{hc}$ est la constante optimale telle que $|\sum_i u(x_i, y_i)| \leq C \frac{1}{2} \max(\|x\|_2 + \|y\|_2, \|x\|_2 \|y\|_2)$
 $\|u\|_{hs} \quad \quad \quad |\sum_i u(x_i, y_i)| \leq C \frac{1}{2} \max(\|x\|_2 + \|y\|_2, \|x\|_2 \|y\|_2)$

Ici: majorer/contrôler $\|u\|_{hs}$ par $\|u\|_{sch}$

Et on a par Rager-Vidich: $\|u\|_{hs} \sim \sum_i |u(x_i, y_i)| \sim \langle \phi, \sum u_d(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i), \phi \rangle$

$$id, u_d: E \otimes \mathbb{C}^d \times F \otimes \mathbb{C}^d \xrightarrow{u_d} \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}^d$$

$$\searrow u_d \quad \downarrow \langle \phi, \cdot \rangle$$

$$\sum_i u_d(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \leq \|u_d\|_{hc}$$

$$\leq 2\|u_d\|_{sch}$$

$$\leq 2\|u\|_{sch}$$

On a un remplacement pour Haagerup:

th [Junge-Pisier] $u: E \times F \rightarrow \mathbb{C}$ $\|u\|_{hc} \leq 4 \kappa(E) \kappa(F) \|u\|_{sch}$ "tracialement bornée"

(ci, $\|u\|_{sch} = \sup \|u_d\|_{sch}$ avec $\varphi_d = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^d e_i \otimes e_i \in \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ pour se ramener au cas de dimension finie

$$= \sup \left\{ \left| \frac{1}{d} \sum_{i,j} u(x_i, y_j) \text{tr}(a_i b_j^t) \right| : \left\| \sum_i x_i \otimes a_i \right\|_{M_d(E)} \leq 1 \right.$$

$$\left. \left\| \sum_j y_j \otimes b_j \right\|_{M_d(F)} \leq 1 \right\}$$

Si on utilise Junge Pisier, on a $\|u\|_{hs} \leq \|u_d\|_{hc} \leq 4 \kappa(E) \kappa(F) \|u\|_{sch}$

$\rightarrow$ on cite d'éc de Haagerup - Thorbjørnsen.