<u>Rappels</u> : $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ GQC de type Kac
$C_r(\mathbb{G}) = \pi_h(A)$ C^*-alg réduite
$L^\infty(\mathbb{G}) = C_r(\mathbb{G})'' \subset B(L^2(\mathbb{G}))$

- $\mathbb{G}$ a la propriété de Haagerup si $L^\infty(\mathbb{G})$ a la propriété de Haagerup
- (M, h) AVN finie, avec une trace h, a la propriété de Haagerup si $\exists$ ens. (ϕ_α) d'appl. NUCP h-pres tq $h \circ \phi_\alpha = h$
  (i) $\phi_\alpha : L^2(M) \longrightarrow L^2(M)$ est compact
  (ii) $\|\phi_\alpha a - a\|_2 \longrightarrow 0 \quad \forall a \in M$

<u>Théorème</u> (Brannan)
$\mathbb{G} = (A, \Delta)$ GQC de type Kac
B = alg. centrale $= C^*\text{-}(\chi_\alpha) = C^*\text{-}\langle \sum_{\alpha \in I} u_{ii}^\alpha \rangle$
I = ens. des classes d'équivalence des corepresentations irréd. unitaires de $\mathbb{G}$.
Soit $\varphi \in B^*$ état, Alors
(i) $T\varphi = \sum_{\alpha \in I} \frac{\varphi(\chi_{\bar{\alpha}})}{d_\alpha} P_\alpha$ contractions unitales sur $L^2(\mathbb{G})$
(ii) $T\varphi_{|L^\infty(\mathbb{G})}$ est NUCP h-pres.

4. GROUPE QUANTIQUE DE REFLEXION H_N^{s+} $(s \in \mathbb{N})$

$H_N^{s+} = (A_h^s(N), \Delta)$ où $A_h^s(N)$ est la C^*-alg engendrée par N^2 éléments normaux u_{ij} tq
(i) $U = (u_{ij})$ et ${}^tU = (u_{ji})$ sont unitaires
(ii) $u_{ij} u_{ij}^* = p_{ij}$ est une projection
(iii) $u_{ij}^s = p_{ij}$

$$\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^N u_{ik} \otimes u_{kj}$$

<u>Remarque</u> : $s = 1 \leadsto$ on retrouve S_N^+.
$s = \infty \leadsto$ même définition, en enlevant la propriété (iii)

$$A_h^s(N) = C(\mathbb{Z}_s) *_\omega A_s(N)$$

$\uparrow$ produit en couronne libre

<u>Définition</u> : A $*$-algèbre de Hopf.

$A *_\omega A_s(N)$ est le quotient de $A^{*N} * A_s(N)$ pour les relations

$$\nu_k(a)v_{ki} - v_{ki}\nu_k(a) = 0 \quad \forall a \in A$$

où (v_{ki}) = générateurs de $A_s(N)$

$\nu_k : A^{(k)} \hookrightarrow A^{*N}$

<u>Théorème</u> (Bichon)

$$\Delta(\nu_i(a)) = \sum_{k=1}^{N} \nu_i(a_{(1)})v_{ik} \otimes \nu_k(a_{(2)}) \qquad \Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$$

$$S(\nu_i(a)) = \nu_i(S_A(a))$$

$$\varepsilon(\nu_i(a)) = \varepsilon_A(a) \qquad \nu_i(a)^* = \nu_i(a^*)$$

<u>Remarque</u> :
- $A_s(N)$ est une alg de permutation quantique
- $C(\mathbb{Z}_s)$ aussi

$\mathbb{Z}_s \subset \Pi_s(\mathbb{C})$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \qquad u_{pq}(\sigma^r) = \delta_{q-p,r}$$

<u>Exemples</u> : $C(\mathbb{Z}_s) *_\omega A_s(N) = C(\mathbb{Z}_s)^{*N} * A_s(N) / \langle [u_{pq}^{(i)}, v_{ij}] = 0 \rangle$

on veut que chaque copie des générateurs de $C(\mathbb{Z}_s)$ commute avec la ième ligne du générateur de $A_s(N)$

On va montrer ~~que~~ $A_h^s(N) = C(\mathbb{Z}_s) *_\omega A_s(N)$

<u>Théorème</u> : $A_h^s(N) \simeq C(\mathbb{Z}_s) *_\omega A_s(N)$

<u>Preuve</u> : ① Soit A_{sud} la C^*-algèbre universelle engendrée par les entrées d'une matrice "sudoku" (d_{ij})

$$\begin{pmatrix} a^0 & a^1 & \dots & a^{s-1} \\ a^{s-1} & a^0 & \dots & a^{s-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a^0 \end{pmatrix}$$

où a^p est une matrice unitaire magique de taille N.

$\to$ unitaire magique

on va montrer que :

$A_{sud} \simeq A_h^s(N)$, via

$$\Phi : A_h^s(N) \longrightarrow A_{sud}$$

$$\Psi : A_{sud} \longrightarrow A_h^s(N)$$

Soit ω une racine $s^{\text{ème}}$ de l'unité.

- On pose $u'_{ij} = \sum_{p=0}^{s-1} \omega^{-p} a^p_{ij} = \phi(u_{ij})$. On vérifie que $U' = (u'_{ij})$ vérifie (i), (ii), (iii) de la déf de $A^s_h(N)$

$\phi : A^s_h(N) \longrightarrow A_{sud}$

$$(i)\quad (U'U'^*)_{ij} = \sum_{p,q,k} \omega^{-p} a^p_{ik} \omega^q a^q_{jk} = \sum_{p,q} \omega^{q-p} \underbrace{\sum_k a^p_{ik} a^q_{jk}}_{\delta_{pq}\delta_{ij}} = \delta_{ij} \sum_{p,k} a^p_{ik} = \delta_{ij}$$

$\Rightarrow U'U'^* = I$

$$(ii)\quad u'_{ij} u'^*_{ij} = \sum_{p,q} \omega^{q-p} a^p_{ij} a^q_{ij} = \sum_p a^p_{ij} \text{ projection}$$

$$(iii)\quad u^s_{ij} = \left(\sum_p \omega^{-p} a^p_{ij}\right)^s = \sum_p a^{sp}_{ij} = \sum_p a^p_{ij} = u'_{ij} u'^*_{ij}$$

- $\varphi : A_{sud} \longrightarrow A^s_h(N)$ où $A^p_{ij} = \frac{1}{s} \sum_r \omega^{rp} u^r_{ij}$

$a^p_{ij} \longmapsto A^p_{ij}$

② $A_{sud} \simeq C(\mathbb{Z}_s) *_\omega A_s(N)$

- $\phi : A_{sud} \longrightarrow C(\mathbb{Z}_s) *_s A_s(N)$

une matrice unitaire magique de $C(\mathbb{Z}_s) \overset{A_s(N)}{*_\omega}$ est donnée par $u^{(i)}_{pq} v_{ij}$

$A^p_{ij} = u^{(i)}_{qp} v_{ij}$ donne le morphisme $\phi(a^p_{ij}) = A^p_{ij}$.

- $\varphi : C(\mathbb{Z}_s) *_\omega A_s(N) \longrightarrow A_{sud}$

$\forall i = 1 .. N,\quad \varphi_i : C(\mathbb{Z}_s) \longrightarrow A_{sud}$

$\varphi_0 : A_s(N) \longrightarrow A_{sud}$

$\varphi_i(u^{(i)}_{pq}) = u^{(i)'}_{pq}$ $\quad u^{(i)'}_{pq} = \sum_k a^{q-p}_{ik}$

$\varphi_0(v_{ij}) = v'_{ij}$ $\quad v'_{ij} = \sum_r a^r_{ij}$

$\varphi_{N+1} : C(\mathbb{Z}_s)^{*N} *_\omega A_s(N) \longrightarrow A_{sud}$

$[u^{(i)'}_{pq}, v'_{ij}] = 0 \longrightarrow$ on peut définir $\varphi : C(\mathbb{Z}_s) *_\omega A_s(N) \longrightarrow A_{sud}$

$\phi\varphi = \varphi\phi = id$

■

$\boxed{N = 2,3}$ $\quad A^s_h(2) = C(\mathbb{Z}_s) *_\omega C(\mathbb{Z}_2)$

$A^s_h(3) = C(\mathbb{Z}_s) *_\omega C(S_3)$

5. ($N \geq 4$) RÈGLES DE FUSION DE $A_R^s(N)$

Théorème : ① $A_R^s(N)$ a une unique famille de corepésentations de dimension N $\{U_k : k \in \mathbb{Z}\}$ qui vérifient

$$(i) \quad U_k = (u_{ij}^k) \quad k \geq 0$$
$$(ii) \quad U_k = U_{k+s} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$
$$(iii) \quad \overline{U}_k = (u_{ij}^{k\,*}) = U_{-k}$$

② (i) $u_1, \dots, u_{s-1}$ sont irréductibles

(ii) $u_0 = 1 \oplus \rho_0$ où ρ_0 est irréductible

(iii) $\rho_0, u_1, \dots, u_{s-1}$ sont distinctes.

On notera $\rho_i = u_i \ominus \delta_{i0} 1$. (corepésentations basiques)

Théorème : $F = \langle \mathbb{Z}_s \rangle$ le monoïde des mots sur $\mathbb{Z}_s$

(a) $\overline{(i_1 \cdots i_k)} = (-i_k) \cdots (-i_1)$

(b) $(i_1 \cdots i_k) \cdot (j_1 \cdots j_l) = (i_1 \cdots i_{k-1})(i_k + j_1)(j_2 \cdots j_l)$

Alors les corepésentations irréductibles de A_R^s sont indexées par F : ρ_x, $x \in F$ tq $\rho_i = U_i \ominus \delta_{i0} 1$ ($i \in \mathbb{Z}_s$) et telles que $\overline{\rho_x} = \rho_{\overline{x}}$

$$\rho_x \otimes \rho_y = \sum_{\substack{x = vz \\ y = \bar{z} w}} \rho_{vw} \oplus \rho_{v \cdot w}.$$

où $v \cdot w$ n'est pas défini si v ou w est le mot vide, dans ce cas le terme $\rho_{v \cdot w}$ disparaît.

$$i_1 \cdots i_k \longmapsto a_{i_1} \cdots a_{i_k} \longmapsto a z^{i_1} a \cdots a z^{i_k} a$$
$$F \qquad\qquad F = \langle a_i, i \in \mathbb{Z}_s \rangle$$

Théorème : $M = \langle a, z \cdots z^s = 1 \rangle$ $\quad a^* = a \quad z^* = z^{-1}$

et les règles de Fusion

$$v a z^i \otimes z^j a w = v a z^{i+j} a w \oplus \delta_{i+j \geq 0}\, v \otimes w \qquad (*)$$

Alors les corepésentations de $A_h^s(N)$ peuvent être indexées par $N = \langle a z^i a, i \in \mathbb{Z}_s \rangle$ avec la règle de fusion $(*)$.

Remarque : $\alpha \in N$ $\quad \alpha = a^{l_1} z^{j_1} \cdots z^{j_{k-1}} a^{l_k} \quad l_i \in \mathbb{N}, j_i \in \mathbb{Z}_s$

corep. irréductible associée à α : r_α

$\rho_0 = u_0 \ominus 1 \rightsquigarrow r_\alpha$ avec $\alpha = a^2$

$\rho_1 = u_1 \rightsquigarrow r_\alpha$ avec $\alpha = aza$

$\rho_{1201} \rightsquigarrow r_\alpha$ avec

$$1201 \to a_1 a_2 a_0 a_1 \to (aza)(az^2a)(az^0a)(aza) = \overset{\alpha}{\overset{\shortparallel}{aza^2z^2a^4za}}$$

règle de fusion

$$aza \otimes aza = \underbrace{az}_{v}a\overset{\circ}{z} \otimes \overset{\circ}{z}a\underbrace{za}_{\omega} = v a\overset{\circ}{z} a\omega \oplus v\otimes\omega$$

$$= azaaza \oplus az\otimes za$$

$$= aza^2za \oplus az\otimes ze = aza^2za \oplus az^2a$$

<u>Propriété</u> : $\exists$ morphisme $\pi : A_h^s(N) \longrightarrow A_s(N)$ tq

$\forall\, i = 1 \dots s-1$ $\quad e_i = \chi_{az^ia} \longmapsto v = 1 \oplus v^{(1)}$

$e_0 = \chi_{a^2} \longmapsto v^{(1)}$

<u>Preuve</u> : $A_h^s(N) \simeq C(\mathbb{Z}_s) *_\omega A_s(N)$

$u_{ij} \longmapsto \sum_p \omega^{-p} a^p_{ij} \longmapsto \sum_p \omega^{-p} u^{(i)}_{\varphi} v_{ij}$

$\sum_p \omega^{-p} u^{(i)}_{\varphi} v_{ij}$: $\quad \varepsilon^{(i)} * id\left(\sum \omega^{-p} u^{(i)}_{\varphi} v_{ij}\right) = \sum_p \omega^{-p} \varepsilon(u^{(i)}_{\varphi}) v_{ij}$

$= \sum \omega^{-p} u^{(i)}_{\varphi} v_{ij}$

$= \sum_p \omega^{-p} \delta_{p0} v_{ij} = v_{ij}$

$\pi : C(\mathbb{Z}_s) *_\omega A_s(N) \longrightarrow A_s(N)$

$e_t = (u_{ij}^t) \longmapsto (v_{ij})$

$t \in \mathbb{Z}_s, t \neq 0$

$\pi(e_t) = v$ (la fondamentale de $A_s(N)$)

$u^\circ_{ij} = u_{ij} u^*_{ij} \xrightarrow{\pi} v_{ij}$ $\qquad e_0 = u \ominus 1 \mapsto v \ominus 1 = v^{(1)}$. ∎

6. PROPRIÉTÉ DE HAAGERUP POUR H_N^{s+}, $N \geq 5$

On veut savoir comment se comportent les caractères de $\hat{A}_h^s(N)$ via $\pi : \hat{A}_h^s(N) \to A_s(N)$.

Rappel : $A_s(N)^{\text{central}} = C^*\text{-alg} < \chi_k : k \in \mathbb{N} > = C^*\text{-alg} < \sum_{i=1}^{d_k} \sigma_{ii}^{(k)}, k \in \mathbb{N} >$

caractères irréductibles de A_s

$$C^*\text{-}<\chi_k> \longrightarrow C(\operatorname{Spec}\chi) = C([0,N])$$

$$\chi_k \longmapsto \pi_k|_{[0,N]} \quad \text{où } \pi_k = \text{pol. de Tchebichev.}$$

$$\pi_0 = 1$$

$$\pi_1 = x - 1$$

$$\pi_1 \pi_k = \pi_{k+1} + \pi_k + \pi_{k-1}$$

$$\pi_k(x) = A_{2k}(\sqrt{x}) \quad \text{où} \quad \begin{cases} A_0 = 1 \\ A_1 = x \\ A_1 A_n = A_{n+1} + A_n \end{cases}$$

Proposition : Soit χ_α un caractère irréductible de $\hat{A}_h^s(N)$ $(\alpha \in \mathbb{N})$

$\alpha = a^{e_1} z^{j_1} \ldots a^{e_{k_\alpha}}$

$$\pi : \hat{A}_h^s(N) \longrightarrow A_s(N) \qquad \text{où } P_\alpha(x^2) = \prod_{i=1}^{k_\alpha} A_{e_i}(x)$$

$$\chi_\alpha \longmapsto P_\alpha$$

Preuve par récurrence

$HR(\lambda)$: $\sum_{i=1}^{k_\alpha} e_i \leq \lambda$ on a $\pi(\chi_\alpha)(x^2) = \prod_{i=1}^{k_\alpha} A_{e_i}(x)$

$HR(2)$: $\sum e_i = 2 \rightsquigarrow \alpha = a z^k a$ ou $a^2 \longrightarrow \chi_{a^2} = e_0 \mapsto \sigma^{(1)} \mapsto x - 1$

$\pi(\chi_\alpha)(x^2) = x^2 - 1 = A_2(x)$

$\chi_\alpha \xmapsto{\pi} \sigma = 1 \oplus \sigma^{(1)} \mapsto 1 + \pi_1 = x$

et on a bien $\pi(\chi_\alpha)(x^2) = A_1(x) A_1(x) = x^2$.

$$\alpha = a^{e_1} z^{j_1} \ldots a^{e_k} = a^{e_1} z^{j_1} \ldots a^{e_k - 2} \otimes a^2 \ominus \underbrace{a^{e_1} z^{j_1} \ldots a^{e_k - 3} \otimes a}_{a^{e_1} z^{j_1} \ldots a^{e_k - 2} \ominus a^{e_1} z^{j_1} \ldots a^{e_k - 4}}$$

(cas le + simple - $e_k \geq 4$.)

$$\xrightarrow{HR} \prod_{i=1}^{k-1} A_{e_i} A_{e_k - 2} A_2 - \prod_{i=1}^{k} A_{e_i} A_{e_k - 3} A_1 - \prod_{i=1}^{k} A_{e_i} A_{e_k - 4}$$

$$\pi(\chi_\alpha)(x^2) = \prod_{i=1}^{k-1} A_{e_i} \underbrace{\left(A_{e_k - 2} A_2 - A_{e_k - 2} - A_{e_k - 4} \right)}_{A_{e_k}(\ldots)}$$

■

Corollaire : π_α une corep. irréductible de $A_h^s(N)$

$\alpha = a^{e_1} z^{j_1} \cdots a^{e_k}$

$\dim(\pi_\alpha) = \prod_{i=1}^{k} A_{e_i}(\sqrt{N})$

(déja dans l'article de [Banica-Vergnioux].)

Preuve : $d_\alpha = \dim(\pi_\alpha) = \varepsilon(\chi_\alpha) = \underbrace{\varepsilon_{A_s(N)}}_{\| \; \mathrm{ev}_N} \circ \pi(\chi_\alpha) \Rightarrow d_\alpha = \prod_{i=1}^{k} A_{e_i}(\sqrt{N})$. ∎

On peut maintenant démontrer le résultat principal :

Théorème $\boxed{H_N^{s+} \text{ a la propriété de Haagerup } (N \geq 5)}$

Preuve.

Notations : $N \geq 5$

$\pi : A_h^s(N) \longrightarrow A_s(N)$

$\varphi_x = A_s(N)^{\mathrm{central}} \longrightarrow \mathbb{C}$

$A_t \longmapsto A_t(x)$

$x > 4$ fixé

$\phi_x = \varphi_x \circ \pi$ états sur $A_h^s(N)^{\mathrm{central}}$

Le théorème de Brannan nous donne un ens. $T\phi_x$ de fonctions NUCP h-pres.

$$T\phi_x = \sum_{\alpha \in \mathrm{Irr}(H_N^{s+})} \frac{\phi_x(\chi_{\bar\alpha})}{d_\alpha} P_\alpha$$

On veut mq :

(1) • $\frac{\phi_x(\chi_{\bar\alpha})}{d_\alpha}$ sont $C_0(N)$

(2) • $\phi_x \longrightarrow \mathrm{id}$ ponctuellement sur $L^\infty(H_N^{s+})$ en norme L^2

sur N, pour $R > 0$ fixé $\left(B_R = \{\alpha \in N : \sum_{i=1}^{k} e_i < R\} \right)$ sont finies

$(f_\alpha) \in C_0(N) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists K$ compact $\subset N$ tq $|f_\alpha| < \varepsilon$ sur $N \setminus K$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists R \,/\,$ si $|f_\alpha| > R$ alors $|f_\alpha| < \varepsilon$

$$\frac{\phi_\alpha(\chi_{\bar\alpha})}{d_\alpha} = \prod_{i=1}^{k_\alpha} \frac{A_{e_i}(\sqrt{x})}{A_{e_i}(\sqrt{N})}$$

On utilise le résultat suivant :

Lemme : $x > 2$ fixé alors $\exists c > 0$

$$\frac{A_t(x)}{A_t(N)} \leq \left(\frac{x}{N}\right)^{ct} \quad \forall t \in \mathbb{N}^*$$

On obtient

$$\frac{\phi_x(\chi_{\bar\alpha})}{d_\alpha} = \frac{\varphi_x \circ \pi(\chi_{\bar\alpha})}{d_\alpha} \underset{\uparrow}{=} \frac{\varphi_x \circ \pi(\chi_\alpha)}{d_\alpha} \leq \left(\frac{x}{N}\right)^{c \overbrace{\sum e_i}^{\ell(\alpha)}} \xrightarrow[\ell(\alpha) \to \infty]{} 0$$

(1) est démontré

seules les puissances de a de α

(2) $\|T\phi_x a - a\|_2 \xrightarrow[x \to N]{} 0 \qquad a = \omega^r_{ij}$

$$\|T\phi_x a - a\|_2 = \|\omega^\alpha_{ij}\|_2 \left| 1 - \frac{\prod A_i(\sqrt{x})}{\prod A_i(\sqrt{N})} \right| \longrightarrow 0 \qquad \text{ok.}$$

$\blacksquare$