

§16 du survey de Pisier et Sz de son article de 2012:

Soit E, F e.o. de dim finie égale N alors

$$d_N(E, F) = \inf \|u_N\| \|u_N^{-1}\| \text{ où l'inf porte sur } u: E \rightarrow F \text{ et}$$

$$u_N = \text{Id} \otimes u: M_N(E) \rightarrow M_N(F). \text{ On a } \sup_N \|u_N\| = \|u\|_{dr}. \text{ On note}$$

$$d_{dr}(E, F) = \inf \|u\|_{dr} \|u^{-1}\|_{dr}$$

$d_{SK}(E)$ est la distance de E aux sous-espaces des opérateurs compacts:

$$= \inf d_{dr}(E, F) \text{ où l'inf porte sur les sous-espaces } F \text{ de } K(\ell_2)$$

(ou sur les sous-espaces de M_K , $K \geq 1$).

$$K_E(N, C) = \min \text{ des dimensions } K \text{ telles que } M_K \supset F \text{ avec } d_N(E, F) \leq C.$$

X e.o. de dim infini:

$$ex(X) = \sup \{ d_{SK}(E) : E \text{ s.e. de } X \text{ de dim finie} \}.$$

$$X \text{ est } C\text{-n-exp si } \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log K_E(N, C)}{N} = 0.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \forall N \geq M \quad K_E(N, C) \leq e^{\varepsilon N} \text{ pour } E \text{ s.e. de } X \text{ de dim infini.}$$

$C(X)$ int de tels C .

Si E, F sont exacts et $u: E \xrightarrow{cb} F^*$, alors pour $n \geq 1$
 $x_1, \dots, x_n \in E$
 $y_1, \dots, y_n \in F$

$$|\sum_i \langle u(x_i), y_i \rangle| \leq 4 \, ex(E) \, ex(F) \|u\|_{dr} \|x\|_{RC} \|y\|_{RC}$$

$$\text{ici } \|x\|_R = \left\| \left(\sum_i x_i x_i^* \right)^{1/2} \right\|, \|x\|_C = \left\| \left(\sum_i x_i^* x_i \right)^{1/2} \right\|, \|x\|_{RC} = \max(\|x\|_R, \|x\|_C).$$

Si E, F sont n-exp, ... inégalité avec $ex(E), ex(F)$ remplacés par $C(E), C(F)$.

Preuve avec des matrices aléatoires:

Soit $Y^{(N)}$ matrice aléatoire $N \times N$ à coefficients de gaussiens complexes centrés de variance $\frac{1}{N}$ indépendants, puis $Y_1^{(N)}, Y_2^{(N)}, \dots, Y_n^{(N)}$ des copies indépendantes.

On a $\|Y^{(N)}\|_{M_1} \rightarrow 2$ p.s. (Geman)

Haagerup et Thorbjörnson ont calculé les moments de $\sum_{j=1}^n x_j^* \otimes Y_j^{(N)}$ avec $x_j \in B(H)$:

$$\text{On a aussi } \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^n x_j \otimes Y_j^{(N)} \right\| \leq 2 \quad \|x_j\|_{RC} \text{ p.s.}$$

Équivalence quantitative: Pour $\epsilon > 0$ il existe N_ϵ et N_ϵ tel que si $N \geq N_\epsilon$, $h \geq 1$,

(*) $x_1, \dots, x_n \in M_k$, alors
$$\mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n x_j \otimes Y_j^{(N)} \right\|_{M_n(M_k)} \leq (1+\epsilon) \left(2 + \epsilon \sqrt{\frac{1+\log h}{N}} \right) \|(x_j)\|_{RC}.$$

Si à présent les x_j sont dans un e.v. E on peut, en se ramenant à l'espace vectoriel des x_j , supposer E de dimension finie.

Si E est exact, soit $C > ex(E)$, soit $u: E \rightarrow F$, $F \subset B(H)$, $\|u\|_{cr} \|u^{-1}\|_{cr} < C$.

Si E n'est pas, soit $u: E \rightarrow F$, $F \subset M_{K_E(N, C(E))}$, $\|u_N\| \|u_N^{-1}\| < C$.

On peut supposer $\|(x_j)\|_{RC} \leq 1$. Soit $y_j = u(x_j)$. Alors, en supposant $n \leq N$.

$$\|(y_j)\|_{RC} \leq \|u_n\| \leq \|u_N\|.$$

$$\left\| \sum_{j=1}^n x_j \otimes Y_j^{(N)} \right\| \leq \|u^{-1}\|_N \left\| \sum_{j=1}^n y_j \otimes Y_j^{(N)} \right\|.$$

$$\leq 2 \|u^{-1}\|_N \|u_N\| \leq 2 ex(E) \text{ si } E \text{ exact.}$$

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n x_j \otimes Y_j^{(N)} \right\| \leq (1+\epsilon) \left(2 + \epsilon \sqrt{\frac{1+\log h}{N}} \right) \text{ si } E \text{ n'est pas exact.}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n x_j \otimes Y_j^{(N)} \right\| \leq 2(1+\epsilon) \text{ et } \epsilon \text{ arbitraire.}$$

Preuve du théorème: Qu'est-ce que $\|u\|_{cr}$? On a pour tout n et $x_{ij} \in M_n(E)$.

$$\|(u(x_{ij}))\|_{\substack{M_n(F^*) \\ (B(F), M_n)}} \stackrel{\|u\|_{cr}}{\leq} \|(x_{ij})\|_{M_n(E)}. \text{ Donc pour toute } y_{jk} \in M_n(F)$$

$$\|(\langle u(x_{ij}), y_{jk} \rangle)\|_{M_n \otimes M_n \simeq M_{nn}} \leq \|u\|_{cr} \|(x_{ij})\|_{M_n(E)} \|(y_{jk})\|_{M_n(F)}.$$

Prenons cela pour

$$(x_{ij}) = \sum_{r=1}^n x_r \otimes a_r$$

$$(y_{jk}) = \sum_{s=1}^n y_s \otimes b_s$$

$$a_r \in M_n, b_s \in M_n$$

$$u(x_{ij}) = (u \otimes I_{M_n}) \left(\sum_{r=1}^n x_r \otimes a_r \right) = \sum_{r=1}^n u(x_r) \otimes a_r \in M_n(F^*).$$

$$\left[\left(\sum_{r=1}^n u(x_r) \otimes a_r \right) \otimes I_{M_n} \right] \left(\sum_{s=1}^n y_s \otimes b_s \right) = \sum_{r,s} \langle u(x_r), y_s \rangle \underbrace{a_r \otimes b_s}_{\in M_n \otimes M_n}.$$

$$\|(\langle u(x_{ij}), y_{jk} \rangle)\| = \sup \left\{ \left| \sum_{j,k} \langle u(x_{ij}), y_{jk} \rangle \xi_{jk} \eta_{jk} \right| : \sum |\xi_{jk}|^2, \sum |\eta_{jk}|^2 \leq 1 \right\}.$$

$$\text{Or } \xi_{jk} \eta_{jk} = \langle (e_{ij} \otimes e_{jk}) \left(\sum_{j',k'} \xi_{j'k'} e_{j'} \otimes e_{k'} \right), \sum_{j'',k''} \eta_{j''k''} e_{j''} \otimes e_{k''} \rangle.$$

$$= \text{tr} \left(e_{ij} \xi \begin{pmatrix} e_{kk} \\ \vdots \\ e_{jj} \end{pmatrix} \eta^* \right)$$

et donc
$$\| = \sup \left\{ \left| \sum_{r,s} \text{tr} (a_r \xi \begin{pmatrix} e_{ss} \\ \vdots \\ e_{rr} \end{pmatrix} \eta^*) \langle u(x_r), y_s \rangle \right| : \|\xi\|_2, \|\eta\|_2 \leq 1 \right\}.$$

Appliquons cela à $\xi, \eta = \frac{1}{\sqrt{N}} \text{Id} \otimes \frac{1}{\sqrt{N}} \text{Id}$

$$\left| \sum_i \text{tr} \left(Y_r^{(N)} \frac{1}{\sqrt{N}} \text{Id} \otimes \frac{1}{\sqrt{N}} \text{Id} \right) \langle u(x_r), y_s \rangle \right| \leq \|u\|_{\mathcal{C}} \left\| \sum_i x_r \otimes Y_r^{(N)} \right\| \left\| \sum_j y_s \otimes \overline{Y_s^{(N)}} \right\|$$

$$\left| \frac{1}{N} \sum_i \sum_j \text{tr} \left(Y_r^{(N)} \otimes \overline{Y_s^{(N)}} \right) \langle u(x_r), y_s \rangle \right|$$

$$\leq \|u\|_{\mathcal{C}} 4 \text{ex}(E) \text{ex}(F) \|x_r\|_{RC} \|y_s\|_{RC}$$

$$\text{Or } \frac{1}{N} \text{tr} \left(Y_r^{(N)} \otimes \overline{Y_s^{(N)}} \right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \underbrace{Y_r^{(N)}(i, j)}_{= \frac{1}{\sqrt{N}} g_r^{(N)}(i, j)} \overline{Y_s^{(N)}(i, j)}$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_r^{(N)}(i, j) \overline{g_s^{(N)}(i, j)}$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} [g_r \overline{g_s}] = \begin{cases} 1 & \text{si } r=s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \left| \sum_i \langle u(x_r), y_r \rangle \right| \leq 4 \text{ex}(E) \text{ex}(F) \|x_r\|_{RC} \|y_s\|_{RC}$$

On a juste utilisé l'inégalité

$$\left| \frac{1}{N} \sum_i \sum_j \text{tr} (a_i b_j) \langle u(x_i), y_j \rangle \right| \leq c \left\| \sum_i x_i \otimes a_i \right\| \left\| \sum_j y_j \otimes b_j \right\|$$

si on prend $a_i = e_{ij}$ $b_j = e_{ji}$

$$\left| \frac{1}{N} \sum_i \sum_j \text{tr} (e_{ij} e_{ji}) \langle u(x_i), y_j \rangle \right| \leq c \|x_i\| \|y_j\|$$

$$\left| \frac{1}{N} \sum_i \sum_j \langle u(x_{ij}), y_{ji} \rangle \right|$$

La constante c ici est appelée $\|u\|_{\mathcal{C}}$ pour "traciallement bornée".

Proposition ④: Soit X v.v. gaussienne à valeurs dans un Banach B réel.

$$\text{Notons } \sigma(X) = \sup \left\{ \left(\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \langle \xi, X \rangle \right|^2 \right)^{1/2} : \xi \in B^*, \|\xi\| \leq 1 \right\}. \quad X = \sum z_i g_i \text{ avec } z_i \in B$$

$$= \sup \left\{ \left(\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \langle \xi, z_i \rangle \right|^2 \right)^{1/2} : \xi \in B^*, \|\xi\| \leq 1 \right\} = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n \langle \xi, z_i \rangle \right\| : \sum_{i=1}^n \langle \xi, z_i \rangle^2 \leq 1 \right\}.$$

$$\text{Alors on a } \left\| \|X\| - \mathbb{E} \|X\| \right\|_p \leq \frac{1}{2} \sigma(X) \|g\|_p.$$

norme de g gaussienne standard

$$\text{On a } \mathbb{E} \phi(f(X) - \mathbb{E} f(X)) \leq \mathbb{E} \phi\left(\frac{\pi}{2} f'(X) \cdot Y\right)$$

pour f localement lipschitzienne, ϕ mesurable convexe et Y copie i.i.d. de X .

$$\text{On pose } X(\vartheta) = X \sin \vartheta + Y \cos \vartheta \quad f(X) - f(Y) = \int_0^\pi \frac{1}{\sin^2 \vartheta} f(X(\vartheta)) d\vartheta$$

$$X'(\vartheta) = X \cos \vartheta - Y \sin \vartheta \quad = \int_0^\pi f'(X(\vartheta)) X'(\vartheta) d\vartheta$$

$$\text{et } \mathbb{E} \phi(f(X) - f(Y)) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \mathbb{E} \phi\left(\frac{\pi}{2} f'(X(\vartheta)) \|X'(\vartheta)\| \vartheta\right) d\vartheta.$$

Or par invariance des gaussiennes corrélées, $(X(\vartheta), X'(\vartheta)) \sim (X, Y)$.

$$\text{et } \mathbb{E} \phi\left(\frac{\pi}{2} f'(X(\vartheta)) \|X'(\vartheta)\| \vartheta\right) = \mathbb{E} \phi\left(\frac{\pi}{2} f'(X) \|Y\| \vartheta\right).$$

$$\text{Finalement } \mathbb{E} \phi(\mathbb{E}_Y(f(X) - f(Y))) \leq \mathbb{E} \phi(f(X) - f(Y)).$$

Application: $\phi = |\cdot|^p$ et $f = \|\cdot\|$: Alors $f(\alpha) - f(\beta) \leq \|\alpha - \beta\| \sigma(X)$:

$$\mathbb{E} \left| \|X\| - \mathbb{E} \|X\| \right|^p \leq \mathbb{E} \left(\frac{\pi}{2} \right)^p \sigma(X)^p \quad \|X - Y\| = \sup$$