

Thm de Grothendieck: Soient E, F des e.o. et $u: E \xrightarrow{cb} F^*$

- Si E, F sont exacts, alors

$$\left| \sum_{i=1}^m \langle u(x_i), y_i \rangle \right| \leq 4 \operatorname{ex}(E) \operatorname{ex}(F) \|u\|_{cb} \|x_i\|_{RC} \|y_i\|_{RC}$$

Pour $x_1, \dots, x_n \in E, y_1, \dots, y_n \in F$.

- Si E et F sont sous-ex., la même chose a lieu avec $\operatorname{ex}(E), \operatorname{ex}(F)$ remplacé par $C(E), C(F)$.

On a en fait démontré que $\|u\|_{tb} \leq \|u\|_{cb}$.

Soit $y^{(N)}$ matrice aléatoire $N \times N$ à coefficients, alors v.o. gaussiennes centrées où $\frac{1}{N} (\mathbb{E} \|y^{(N)}\|_F^2) = N$ indépendante

Puis on prend $y_1^{(N)}, y_2^{(N)}, \dots$ de copies indépendantes de $y^{(N)}$

$$\|y^{(N)}\|_{M_N} \rightarrow 2$$

On a aussi (Hagerup et Thorup) une formule pour

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j \otimes y_j^{(N)} \right\|_{M_N \otimes B(H)} \text{ avec } a_1, \dots, a_n \in B(H)$$

Soit $a_1, \dots, a_n \in E$: on peut supposer E de dimension finie.

$$\text{De même: } \left\| \sum a_j \otimes y_j^{(N)} \right\|_{E \otimes M_N} \leq \|u\|_{cb} \left\| \sum a_j \otimes y_j^{(N)} \right\|_{B(H) \otimes M_N}$$

$$\text{Donc } \liminf \left\| \sum a_j \otimes y_j^{(N)} \right\| \leq 2 \operatorname{ex}(E) \|a_j\|_F$$

~~Donc~~

Claim: de Haagerup et Thorstjornsen.

$$Y_j^{(w)}.$$

$$S = \sum a_j \otimes Y_j^{(w)} \text{ avec } a_j \in B(H) \quad \|(a_j)\|_{RC} \leq 1.$$

$$\text{HT: } E(S^*S)^P \leq 1 \otimes E \underbrace{(Y^{(w)*} Y^{(w)})^P}_{M_n}$$

$$B(H) \otimes M_n$$

$$\downarrow \dim H = k.$$

$$E \operatorname{tr}(S^*S)^P \leq k E \operatorname{tr}(Y^{(w)*} Y^{(w)})^P.$$

$$\|S\|_{2P} \leq k^{\frac{1}{2P}} \|Y^{(w)}\|_{2P}.$$

$$\text{Rk: } \|S\|_{2P} \leq E \|Y^{(w)}\|_{2P} \|(a_j)\|_{RC}^{2P}.$$

$$\uparrow \left\| (\sum a_j a_j^*)^{\frac{1}{2}} \right\|_{2P} \vee \left\| (\sum a_j^* a_j)^{\frac{1}{2}} \right\|_{2P}.$$

[lemme 3.1] $\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma_\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \text{ t.q. } \forall N \geq N(\varepsilon).$

$$E \|S\| \leq (1+\varepsilon) \left(2 + \gamma_\varepsilon \left(\frac{\log k + 1}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

$$\text{Pf: } \overline{X} \subset \overline{Y} \subset \overline{Z}$$

$$\text{Cor. } \dim E < \infty, \quad \overbrace{K_E(N, c)}^{\Leftrightarrow E \in \text{FCM}_R} < \infty, \quad \forall a_j \in E.$$

$$\|(a_j)\|_{RC}$$

$$E \left\| \sum a_j \otimes Y_j^{(w)} \right\|_{E \otimes M_n} \leq C (1+\varepsilon) \left(2 + \gamma_\varepsilon \left(\frac{\log K_E(N, c) + 1}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \right) r.$$

$$\Rightarrow \limsup_N E \left\| \sum a_j \otimes Y_j^{(w)} \right\|_{E \otimes M_n} \leq 2C \|(a_j)\|_{RC}.$$

Inégalité def: $\forall \varepsilon > 0. \exists C_\varepsilon$ t.q. $N \geq C_\varepsilon n k^2$. $S_n = \sum a_j \otimes f_j^{(n)}$
 $\forall (a_j) \in M_k^n \quad \|S_n\| \leq (2+\varepsilon) \|(a_j)\|_{RC}$
 a lien avec probabilité au moins $1 - \frac{1}{3^{2nk^2} kN}$.

$$P \left(\max_n \|S_n\| > \lambda (MkN)^{\frac{1}{2p}} \right) \leq \frac{1}{\lambda (MkN)^{\frac{1}{2p}}} E \max_n \|S_n\|$$

Thm $\forall n \geq 1, \varepsilon > 0, \exists$ continuum d'espace d'opérateur de dim. n. qui sont $(2+\varepsilon)$ -sous exponentiels et à distance cb $\geq \frac{n}{(2+\varepsilon)^4}$ et de constante d'exatitute $\geq \frac{\sqrt{n}}{(2+\varepsilon)^3}$.

Preuve $\varepsilon > 0 \forall n \geq 1$ on prend $E(n)$ donné par le théorème précédent
 $((2+\varepsilon)$ ss expo $ex(E(n)) \geq \frac{\sqrt{n}}{(2+\varepsilon)^3}$)

$X = \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E(n) \right)$ n'est pas exact.

Soit E un ssespace de dim fixé de X .

Lemme P69 Pisier IOS:

$u: E \rightarrow F \subseteq \bigoplus_{n=1}^q E(n)$ t.q. u cb-isomorphisme
 et. $\|u\|_{cb} \|u^{-1}\|_{cb} \leq 1 + \varepsilon$

$N \geq 1$. $K_E(N, (2+\varepsilon)(1+\varepsilon)) \leq K_F(N, 2+\varepsilon)$.

F est $(2+\varepsilon)$ ss-exponentiel.

$\forall n \in [1, q]$ $E(n)$ $(2+\varepsilon)$ ss-expo.

$$K_F(N, 2+\varepsilon) \leq K_E(N, 2+\varepsilon) \leq \sum_{n=1}^q K_{E(n)}(N, 2+\varepsilon)$$