Alexandre
12/12/2012

Dernière section de l'article de Pisier

Théorème : $\forall n \geq 1$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ continuum d'e.o. de dim n $(2+\varepsilon)$-sous-exponentiels mutuellement à $d_{cb} \geq \frac{n}{(2+\varepsilon)^4}$ et de constante d'exactitude $\geq \frac{\sqrt{n}}{(2+\varepsilon)^3}$

Corollaire : $\forall \varepsilon > 0$ $\exists E$ e.o. séparable $(2+\varepsilon)$-sous-exponentiel non-exact.

Dém. du corollaire : Fixons $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$. Prenons $E(n)$ de dim n $(2+\varepsilon)$-s.-e. avec $ex E(n) \geq \frac{\sqrt{n}}{(2+\varepsilon)^3}$

On pose alors $X = c_0 - \bigoplus_{n \geq 1}^{\infty} E(n)$. Alors X n'est pas exact. Calculons la constante de s.-e. : soit E se de dim finie ; par perturbation, il existe [cf lemme page 69 de l'Intro aux e.o de Pisier] système biorthogonaux base d'Auerbach. $u : E \longrightarrow F \subseteq \bigoplus_{n=1}^{q} E(n) = G$ cb-isomorphisme avec $\|u\|_{cb} \|u^{-1}\|_{cb} \leq 1+\varepsilon$.

Pour $N \geq 1$, $K_E(N, (2+\varepsilon)(1+\varepsilon)) \leq K_F(N, 2+\varepsilon)$. On est ramené à montrer que F est $(2+\varepsilon)$-s.-e. Alors $K_F(N, 2+\varepsilon) \leq K_G(N, 2+\varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{q'} K_{E(n)}(N, 2+\varepsilon)$

[On injecte les q matrices de taille $K_{E(n)}$ dans une matrice de taille $\sum K_{E(n)}$ de manière diagonale] Donc $\frac{\log K_F(N, 2+\varepsilon)}{N} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$. ∎

Schéma de la preuve du théorème : Soit $n \geq 1$ et $(N(m))$ une suite d'entiers ↑ st^t.

Soit $E = \operatorname{span}[x_1, \dots, x_n]$ où $x_j \in \bigoplus_{m=0}^{\infty} M_{N(m)}$, $x_j = \bigoplus_{m=0}^{\infty} x_j(m)$. On va choisir $x_j(m) = Y_j^{N(m)}$, matrice gaussienne de taille $N(m)$ à entrées i.i.d. de loi $\frac{1}{\sqrt{2N}}(g + ig')$ où g et g' sont $\mathcal{N}(0,1)$ indépendants, pour $m \geq 1$; pour $m = 0$, $x_j(0) = e_{1j} \oplus e_{j1} \in M_n \oplus M_n \subseteq M_{2n}$

Soit $A \subseteq \mathbb{N}$ et $E_A = \operatorname{span}\{x_1(A), \dots, x_n(A)\}$ où $x_j(A) = \bigoplus_{m \in A} x_j(m)$

N.B. : les $x_j(0)$ engendrent $R_n \cap C_n$: donc $E_{\{0\}} = R_n \cap C_n$.

Pour $A, B \subseteq \mathbb{N}$, soit u l'application naturelle $E_B \to E_A$, $x_j(B) \mapsto x_j(A)$ entre espaces de dimension n p.s. (cf la suite !)

On va montrer les points suivants $(\varepsilon > 0)$: ① Pour un choix convenable de $(N(m))$, et en utilisant les estimations prouvées par Xu, chaque espace E_A est $(2+\varepsilon)$-s.e.

En fait, il existe m_0 tel que, pour $m \geq m_0$ et $y = (y_j) \in M_{N(m)}^n$, $\|y\|_{RC} \leq \sup_{m' \geq m} \|\sum x_j(m') \otimes y_j\| \leq (2+\varepsilon)\|y\|_{RC}$ presque sûrement. C'est vrai aussi pour les E_A [i.e., les sous-suites] et $(x_j(A))_{j=1}^{n}$ est libre p.s.

(2) Si A et B sont infinis et il existe $m \geq m_0$ tel que $A \cap [\![0,m]\!] = B \cap [\![0,m]\!]$, alors

$$\begin{aligned} u : E_B &\longrightarrow E_A \\ x_j(B) &\longmapsto x_j(A) \end{aligned}$$ satisfait $\|u_k\| \leq 2+\varepsilon$ pour $k \in N(m)$.

(3) Si $A, B \subseteq [\![m_0, +\infty[\![$ et $\forall N$ $A \cap [\![N, +\infty[\![\not\subseteq B \cap [\![N, +\infty[\![$, alors $u : E_B \to E_A$ donnée par $u(x_j(B)) = \sum_i a_{ij}\, x_i(A)$ pour une matrice $(a_{ij}) \in M_n$ satisfait

$$\frac{\|(a_{ij})\|_{HS}}{(2+\varepsilon)^2} \leq \|u\|_{cb(E_B,E_A)} \leq (2+\varepsilon)\|(a_{ij})\|_{HS}.$$ Si $(a_{ij}) = \mathrm{Id}_n$, $\frac{\sqrt{n}}{(2+\varepsilon)^2} \leq \|u\|_{cb(E_B,E_A)} \leq (2+\varepsilon)\sqrt{n}$

Admettons (1), (2) et (3) et prouvons le théorème : soit $A \subseteq [\![m_0, \infty[\![$ infini. Pour chaque $m \geq m_0$, soit $B(m)$ infini tel que $A \cap [\![0,m]\!] = B \cap [\![0,m]\!]$ et $\forall N$ $A \cap [\![N,\infty[\![\not\subseteq B \cap [\![N,\infty[\![$.

Notons $$\begin{aligned} u(m) : E_{B(m)} &\longrightarrow E_A \\ x_j(B(m)) &\longmapsto x_j(A) \end{aligned}$$. Supposons E_A exact de constante $< c$.

Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ et $F \subseteq M_k$ de $d_{cb}(E_A, F) < c$ et $v : E_A \to F$ isomorphisme c.b tel que $\|v\|_{cb}\|v^{-1}\|_{cb} < c$: $\quad E_{B(m)} \xrightarrow{u(m)} E_A \xrightarrow{v} F \subseteq M_k$.

Or $\|u(m)\|_{cb} \leq \|v^{-1}\|_{cb}\|v \circ u(m)\|_{cb} = \|v^{-1}\|_{cb}\|(v \circ u(m))_k\|$ [Lemme de Smith]

$\leq \|v^{-1}\|_{cb}\|v\|_{cb}\|(u(m))_k\| < c\|(u(m))_k\|$.

Si m est tel que $N(m) \geq k$, $\|(u(m))_k\| \leq 2+\varepsilon$ et donc $\|u(m)\|_{cb} < c(2+\varepsilon)$.

Par ailleurs, grâce à (3), $\|u(m)\|_{cb} \geq \frac{\sqrt{n}}{(2+\varepsilon)^2}$, d'où $c \geq \frac{\sqrt{n}}{(2+\varepsilon)^3}$ et $ex(E_A) \geq \frac{\sqrt{n}}{(2+\varepsilon)^3}$

La famille d'espaces à considérer est une famille de E_A, avec A tels que les "queues" $A \cap [\![N, +\infty[\![$ soient mutuellement distinctes. Il y a une telle famille avec la puissance du continu.

Alors si on a E_A et E_B avec A et $B \in \Lambda$, $d_{cb}(E_A, E_B) \geq \frac{n}{(2+\varepsilon)^4}$.

En effet, si $u : E_B \to E_A$ est un isomorphisme cb, il existe $(a_{ij}) \in M_n$ tel que $u(x_i(B)) = \sum_i a_{ij}\, x_j(A)$. Par (3), $\frac{\|(a_{ij})\|_{HS}}{(2+\varepsilon)^2} \leq \|u\|_{cb} \leq (2+\varepsilon)\|(a_{ij})\|_{HS}$ et

$$\|u\|_{cb} \times \|u^{-1}\|_{cb} \geq \frac{\|(a_{ij})\|_{HS}}{(2+\varepsilon)^2}\,\frac{\|(a_{ij})^{-1}\|_{HS}}{(2+\varepsilon)^2} \geq \frac{\|I_n\|_{S_1^n}}{(2+\varepsilon)^4} = \frac{n}{(2+\varepsilon)^4}$$ [c'est mieux que Pisier !]

Maintenant, prouvons (1) : Lemme 1 : S'il existe $C \geq 1$ et m tel que $N(m) \geq n$ tel que pour $k \leq N(m)$ et $(y_j) \in M_k^m$, $\|y\|_{RC} \leq \sup \|\sum_i x_j(m') \otimes y_j\| \leq C\|y\|_{RC}$, alors $E = \mathrm{span}[x_1, \dots, x_n]$ satisfait $K_E(N(m), C) \leq \sum_{0 \leq m' \leq m} N(m')$ et de même E_A satisfait $K_{E_A}(N(m), C) \leq \sum_{0 \leq m' \leq m} N(m')$.

norme du terme de rang (1)

$m' > m$

Démonstration : Soit $J : E \longrightarrow \bigoplus_{0<m'\le m} M_{N(m')} \oplus (M_n \oplus M_n) \subset M_K$, $K=\sum N(m')+n+n$, et $(y_j) \in M^n_{N(m)}$:

$x_j \longmapsto x_j([\![0,m]\!])$

$$\|\sum' x_j([\![0,m]\!])\otimes y_j\| \le \|\sum' x_j\otimes y_j\| \le \max\left(\|\sum' x_j([\![0,m]\!])\otimes y_j\|, C\|y\|_{RC}\right) = C\|\sum' x_j([\![0,m]\!])\otimes y_j\|.$$

et $J : E \longrightarrow J(E)$ satisfait $\|J_{N(m)}\|\le 1$ et $\|J^{-1}_{N(m)}\|\le C$: $d_{N(m)}(E,J(E))\le C$.

Donc on a $K_E(N(m),C)\le 2n+\sum_{0<m'\le m} N(m')$.

N.B. : Cela reste-t-il vrai pour tous les E_A ? (A infini). Il faut adapter : remplacer $[\![0,m]\!]$ par $[\![0,m]\!]\cap A$ et envoyer x_j sur $x_j([\![0,m]\!]\cap A\cup\{0\})$ et modifier l'hypothèse en considérant $\sup_{m'\ge m,\ m'\in A}$!

Lemme 6.2. La suite de matrices aléatoires $(Y_j^{(N)})$ converge en moments vers des v.a. circulaires libres $(c_j)_{j=1}^N$: pour tout polynôme non commutatif à $2n$ variables,

$$\mathbb{E}\,\underset{\text{trace normalisée}}{\mathrm{tr}}\,P(Y_j^{(N)},Y_j^{(N)*}) \longrightarrow \tau(P(c_j,c_j^*))$$

[Wigner – Voiculescu] qui se généralise immédiatement au cas vectoriel.

$\to$ Soit $(N(m))\uparrow$ st. Pour presque tout $\omega\in\Omega$, pour tout $k\ge 1$ et $(y_j)\in M_k^n$ on a $\|y\|_{RC}\le \varliminf_{m\to\infty}\|\underbrace{\sum Y_j^{(N(m))}\otimes y_j}_{S_m}\|$

Dém : Soit $k\ge1$: pour tout $k\ge 1$, $(y_j)\in M_k^n$, on a, pour presque tout $\omega\in\Omega$, $\|y\|_{RC}\le \varliminf\|\sum \quad\|$.

N.B. : notons $S=\sum' c_j\otimes y_j$. On a $S_m\to S$ en moments et $\mathbb{E}\,\mathrm{tr}\otimes\underset{\text{normalisée}}{\mathrm{Tr}}\,P(S_m,S_m^*)$ tend vers $\tau\otimes\mathrm{Tr}(S,S^*)$. (Il faut se débarrasser de $\mathbb{E}$: concentration de la mesure, puis par densité ; mais pour un seul P, quid ?

$\mathbb{E}|\mathrm{tr}\otimes\mathrm{Tr}\,P(S_m,S_m^*)-\tau\otimes\mathrm{Tr}\,P(S,S^*)| \xrightarrow{?} 0$ et puis utiliser Tchebychev.

Exemple : Montrer que $\|Y^{(N)}\|\xrightarrow[ps]{} 2$: $Y^{(N)}=\sum\frac{1}{\sqrt{2N}}(g'_{ij}+ig''_{ij})e_{ij}$; $Y^{(N)*}Y^{(N)}$.

Considérons $f : \mathbb{R}^{2N^2}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$x=((\alpha'_{ij},\alpha''_{ij}))\longmapsto \mathrm{tr}\left(\left[\sum_{ij}\frac{1}{\sqrt{2N}}(\alpha'_{ij}+i\alpha''_{ij})e_{ij}\right]^*[\quad]\right)$$

Or, si f est σ-Lipschitz, où $\sigma=\sup\frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|_2}$ et P mesure gaussienne canonique sur $\mathbb{R}^d$, alors $P[|f-\mathbb{E}f|>t]\le 2e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$. Puis on applique Borel Cantelli : on a $P[|f_N-\mathbb{E}f_N|>t]\le Ce^{-Nt^2}$ et $\mathbb{E}\{|\mathrm{tr}\,Y^{(N)*}Y^{(N)}-\mathbb{E}\,\mathrm{tr}\,Y^{(N)*}Y^{(N)}|>t\}\le Ce^{-Nt^2}$ ou bien on procède par majoration de mesure. Borel Cantelli : $\sum P(A_n)<\infty \Rightarrow P(\varliminf (A_n))=1$.