

À prouver : (a) $\forall k \geq 1 \forall (y_i) \in M_{\mathbb{R}}^k \quad \|y\|_{RC} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^n y_i^{X_i^{(n)}} \otimes y_i \right\|$

(b) $\forall P$ polynôme non commutatif en $2n$ variables $\varepsilon \circ P(y_i^{(N)}, y_i^{(N)*}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \varepsilon \circ P(c_i, c_i^*)$

(c) $\exists C > 0 : \limsup_{N \in \mathbb{N}} \left\| \frac{Y^{(N)}}{\sqrt{N}} \right\| \leq C \text{ p.s.}$

Concentration gaussienne de la mesure: Si $f: \mathbb{R}^d \xrightarrow{\text{Lip}} \mathbb{R}$ et $\sigma = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|_2}$

$\mathbb{P}$ mesure gaussienne canonique sur $\mathbb{R}^d$: $\forall t > 0 \quad \mathbb{P}[|f - \mathbb{E}f| > t] \leq 2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$

On a $Y^{(N)} = \frac{X^{(N)} + iZ^{(N)}}{\sqrt{2N}}$, $X^{(N)}, Z^{(N)}$ à entrées $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes.

On a ramené à: $\left\| \frac{X^{(N)}}{\sqrt{N}} \right\| \leq C \text{ p.s.}$

Soit $\varepsilon > 0$. On prend un ε -réseau $(\xi_i)_{i=1}^m$ dans la boule unité de $\mathbb{R}^N$

Calcul: $\left\| \frac{X^{(N)}}{\sqrt{N}} \right\| \leq \sup_{1 \leq i, j \leq m} \left| \left\langle \frac{X^{(N)}}{\sqrt{N}}, \xi_i - \xi_j \right\rangle \right| \times \frac{1}{1-2\varepsilon}$ où $m \leq \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^N$

On a $f_N: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $X \mapsto \frac{1}{\sqrt{N}} \langle X \xi_i, \xi_j \rangle$ Lipschitz :

$$\frac{|f_N(X) - f_N(Y)|}{\|X - Y\|} \leq \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Par concentration, $\mathbb{P}\left[\left|\frac{\langle X^{(N)}, \xi_i - \xi_j \rangle}{\sqrt{N}}\right| > \varepsilon\right] \leq 2 e^{-\frac{\varepsilon^2 N}{2}}$

$$\mathbb{P}\left[\sup_{i,j} \left|\frac{\langle X^{(N)}, \xi_i - \xi_j \rangle}{\sqrt{N}}\right| > \varepsilon\right] \leq 2 \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^{2N} e^{-\frac{\varepsilon^2 N}{2}}$$

$$\mathbb{P}\left[\left\| \frac{X^{(N)}}{\sqrt{N}} \right\| > \varepsilon\right] \leq 2 \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^{2N} e^{-\frac{\varepsilon^2 (1-2\varepsilon)^2 N}{2}} \leq 2 e^{-\frac{4N}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon^2 (1-2\varepsilon)^2 N}{2}}$$

Avec $\varepsilon = \frac{1}{4}$ et $t=17$, on a $\sum f_n < \infty$.

Du Borel Cantelli $\mathbb{P}\left[\bigcup_{N_0} \bigcap_{N \geq N_0} \left\{ \left\| \frac{X^{(N)}}{\sqrt{N}} \right\| \leq 17 \right\}\right] = 1.$

$$C, P(A_n) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap A_n\right) = 0$$

b) Il suffit de montrer que pour tout monôme en $X_i^{(N)}, X_i^{(N)*}$ de degré d on a
 $\mathbb{P}\left[\left|\varepsilon P(X_i^{(N)}, X_i^{(N)*}) - \mathbb{E} \varepsilon P(X_i^{(N)}, X_i^{(N)*})\right| > N^{\frac{d}{2}} \varepsilon\right] \leq 2 e^{-c(m,d) N^{\frac{d}{2}} \varepsilon^2}$ avec $c(m,d) > 0$.

B_C boule fermée de centre 0 et rayon C de $\mathbb{R}^{2N}$; $f: (B_C)^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{N^{\frac{d}{2}}} \varepsilon(X_{i_1}^{x_1} \dots X_{i_d}^{x_d})$$

la trace normalisée sur M_N . f n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^{2N^2}$ tout entier, c'est pourquoi

qu'on se restreint à B_C . Quand on calcule la constante de Lipschitz, on obtient

$$\sup_{B_C} \|\nabla f\| \leq \frac{\sqrt{m} d C^{d-1}}{N^{d/2}}, \text{ on a } c(m,d) = (2m d^2 C^{2d-2})^{-1}$$

Pour terminer, on prolonge f en $\tilde{f} : (\mathbb{R}^{N^2})^n \rightarrow \mathbb{R}$ avec même constante de Lipschitz. 26/11/12 (2)
 On applique la concentration de la mesure à $\tilde{f}$.

Par Borel Cantelli, $\frac{1}{N^{d/2}} \ln \mathbb{P}(X_i^{(N)}, X_i^{(N)*}) - \frac{\mathbb{E} \otimes \ln \mathbb{P}(X_i^{(N)}, X_i^{(N)*})}{N^{d/2}} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} 0$
 ○: N'a-t-on pas toujours ça dans le TCL.

① Considérons $S_y = \sum_{i=1}^n Y_i^{(N)} \otimes y_i$, $y_i \in M_{\mathbb{C}}^n$: $\|S_y\| = \sup_{\uparrow} \ln_N \otimes \ln [(S_y^* S_y)^p]^{\frac{1}{2p}}$

$$\begin{aligned} \ln_N \otimes \ln (S_y^* S_y)^p &= \ln \otimes \ln \left(\sum_i \sum_j Y_i^{(N)*} Y_j^{(N)} \otimes y_i^* y_j \right)^p \\ &= \ln \otimes \ln \left(\sum_{(i_1, j_1) \dots (i_p, j_p)} (Y_{i_1}^{(N)*} Y_{j_1}^{(N)}) \dots (Y_{i_p}^{(N)*} Y_{j_p}^{(N)}) \otimes (y_{i_1}^* y_{j_1}) \dots (y_{i_p}^* y_{j_p}) \right) \\ &= \ln_N \sum_{(i_1, j_1) \dots (i_p, j_p)} \ln ((y_{i_1}^* y_{j_1}) \dots (y_{i_p}^* y_{j_p})) Y_{i_1}^{(N)*} Y_{j_1}^{(N)} \dots Y_{i_p}^{(N)*} Y_{j_p}^{(N)} \\ &\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} \tau \left(\frac{c_{i_1}^* c_{j_1} \dots c_{i_p}^* c_{j_p}}{c_{i_1}^* c_{j_1} \dots c_{i_p}^* c_{j_p}} \right) \\ &= \tau \otimes \ln \left[\left(\sum c_i \otimes y_i \right)^* \left(\sum c_j \otimes y_j \right) \right]^p. \end{aligned}$$

On a ainsi $\forall p \quad \ln_N \otimes \ln ((S_y^* S_y)^p)^{\frac{1}{2p}} \leq \|S_y\|$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\uparrow \\ p}} \ln \otimes \ln \left| \sum c_i \otimes y_i \right|^{pp \frac{1}{2p}} &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \|S_y\| \quad p.s. \\ \uparrow \\ \lim_{p \rightarrow \infty} \left\| \sum c_i \otimes y_i \right\| &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \|S_y\| \quad p.s. \\ &\leq \| (y_i) \|_{RNC}. \end{aligned}$$