Catégories tensorielles

<u>Déf</u> : Une <u>catégorie tensorielle</u> est $(\mathcal{C}, \otimes)$, où $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ est un bifoncteur

[Mugel, Roberts, … écrivent seulement $\times$, d'autres $\boxtimes$: il n'y a pas assez de symboles]

tel que $E \otimes A \cong A \cong A \otimes E$ et $(A \otimes B) \otimes C \overset{\alpha}{\cong} A \otimes (B \otimes C)$

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux catégories, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ est un foncteur tensoriel si

$F_0 : E' \longrightarrow F(E)$, $F_2 : F(A) \otimes F(B) \longrightarrow F(A \otimes B)$ sont tels que

$$\begin{tikzcd}
(F(A) \otimes F(B)) \otimes F(C) \arrow[r, "F_2 \otimes id"] \arrow[d, "\alpha'"] & F(A \otimes B) \otimes F(C) \arrow[d] \\
F(A) \otimes (F(B) \otimes F(C)) \arrow[d, "id \otimes F_2"] & F((A \otimes B) \otimes C) \arrow[d, "F(\alpha)"] \\
F(A) \otimes F(B \otimes C) \arrow[r, "F_2"'] & F(A \otimes (B \otimes C))
\end{tikzcd}$$

<u>Idée</u> : le foncteur tensoriel est un genre d'homomorphisme pour le produit tensoriel

$$\begin{tikzcd}
F(E) \otimes F(A) \arrow[r, "F_2"] & F(E \otimes A) \arrow[d, "F(\lambda)"] \\
E' \otimes F(A) \arrow[u, "F_0 \otimes id"] \arrow[r, "\lambda'"'] & F(A)
\end{tikzcd}$$

et pareillement pour ρ

Une transformation naturelle $\eta : F \longrightarrow G$ entre deux foncteurs tensoriels $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ est appelée <u>monoïdale</u> si

$$\begin{tikzcd}
F(A) \otimes F(B) \arrow[r, "F_2"] \arrow[d, "\eta_A \otimes \eta_B"'] & F(A \otimes B) \arrow[d, "\eta_{A \otimes B}"] \\
G(A) \otimes G(B) \arrow[r, "G_2"'] & G(A \otimes B)
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
 & E' \arrow[dl, "F_0"'] \arrow[dr, "G_0"] & \\
F(E) \arrow[rr, "\eta_E"'] & & G(E)
\end{tikzcd}$$

Deux catégories tensorielles sont <u>monoïdalement équivalentes</u> s'il existe des foncteurs tensoriels $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ et $G : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ tels que FG et GF sont naturellement monoïdalement isomorphes aux foncteurs identité : $FG \cong id_{\mathcal{C}'}$, $GF \cong id_{\mathcal{C}}$.

<u>Déf</u> : Un foncteur tensoriel $F : \mathcal{C} \longrightarrow Hilb_f$ (espace de Hilbert de dim finie) est un foncteur <u>fibré</u> s'il est fidèle (c.-à-d. injectif sur les morphismes) et exact (c.-à-d. préserve les suites exactes)

Neshveyev énonce qu'«exact» est automatique
+ Tuset
sur leur page web. / Peter Schauenburg de Dijon

Les C^*-catégories :

(i) $\mathrm{Mor}(u,v)$ est un espace de Banach pour tous $u,v \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ (objets de $\mathcal{C}$)
et $\mathrm{Mor}(v,w) \times \mathrm{Mor}(u,v) \longrightarrow \mathrm{Mor}(u,w)$, $(S,T) \longmapsto ST$ est bilinéaire et $\|ST\| \le \|S\|\,\|T\|$

(ii) Il existe un foncteur antilinéaire et contravariant $*: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tel que $u^* = u$ pour $u \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$
et $\mathrm{Mor}(u,v) \longrightarrow \mathrm{Mor}(v,u)$, $T \longmapsto T^*$ qui vérifie $T^{**} = T$, $\|T^*T\| = \|T\|^2$ pour $T \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$

[Donc $\mathrm{End}(u)$ est une C^*-algèbre pour tout $u \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$]

(iii) Pour tout $T \in \mathrm{Mor}(u,v)$, $T^*T \in \mathrm{End}(u)$ est positif.

(iv) <u>C^*-catégorie tensorielle</u> : on ajoute $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ bilinéaire sur les morphismes,
des isomorphismes naturels unitaires $\alpha_{u,v,w}$, λ_u, ρ_u tels que $\lambda_E = \rho_E$

(v) et $(S \otimes T)^* = S^* \otimes T^*$

Nous allons supposer en plus que

(vi) $\mathcal{C}$ a des sommes directes finies : pour tous objets U, V il existe un objet W et des isométries $u \in \mathrm{Mor}(U,W)$ et $v \in \mathrm{Mor}(V,W)$ (i.e., $u^*u = \mathrm{id}_U$, $v^*v = \mathrm{id}_V$) tels que $uu^* + vv^* = \mathrm{id}_W$

(vii) $\mathcal{C}$ a des sous-objets : pour toute projection $p \in \mathrm{End}(U)$ $(p = p^* = p^2)$ il existe un objet V et une isométrie $v \in \mathrm{Mor}(V,U)$ tels que $vv^* = p$

(viii) L'objet unité E est simple, c.-à-d. $\mathrm{End}(E) = \mathbb{C}\,\mathrm{id}$

(ix) $\mathcal{C}$ est petite, c.-à-d. que $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ est un ensemble.

On dit que $\mathcal{C}$ est stricte si $(U \otimes V) \otimes W = U \otimes (V \otimes W)$ [une vraie égalité !]
$E \otimes U = U$, $U \otimes E = U$
et MacLane a montré qu'une catégorie est équivalente à une catégorie stricte.

Il faut encore une notion de dualité !
Si on a F foncteur fibré : $\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Hilb}_f$, on considère $U = \mathrm{Nat}(F,F) = \mathrm{End}(F)$ ($*$-algèbre de Hopf)
et l'algèbre de Hopf qu'on considère est le dual de U.
i.e., il existe $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ gqc tel que $\mathrm{Corep}_f(\mathbb{G}) \cong \mathcal{C}$.
Il faut donc définir la C^*-catégorie tensorielle avec dual.

Soit $\mathcal{C}$ une C^*-catégorie tensorielle stricte.

Déf : Un objet $\overline{U}$ est dual (ou conjugué) à un objet U s'il existe $R : E \longrightarrow \overline{U} \otimes U$ et $\overline{R} : E \longrightarrow U \otimes \overline{U}$ tels que $U \xrightarrow{id \otimes R} U \otimes \overline{U} \otimes U \xrightarrow{\overline{R}^* \otimes id} U$ et $U \xrightarrow{\rho^{-1}} U \otimes E \longrightarrow U \otimes (\overline{U} \otimes U) \xrightarrow{\alpha} (U \otimes \overline{U}) \otimes U \longrightarrow E \otimes U \xrightarrow{\lambda} U$ et $\overline{U} \xrightarrow{id \otimes \overline{R}} \overline{U} \otimes U \otimes \overline{U} \xrightarrow{R^* \otimes id} \overline{U}$ sont égaux aux morphismes identité.

Ainsi $(\overline{R}^* \otimes id) \circ (id \otimes R) = id$ et $(R^* \otimes id) \circ (id \otimes \overline{R}) = id$.

Si tout objet de $\mathcal{C}$ admet un dual, on dit que $\mathcal{C}$ est rigide.

ex : U espace de Hilbert, R l'adjoint du produit scalaire ; $\mathbb{C} \longrightarrow \overline{H} \otimes H$, $\lambda \longmapsto \lambda \sum \overline{e_i} \otimes e_i$ où $\{e_i\}$ b on de H.

Coreprésentations de groupes q compacts

Théorème : Woronowicz '88 selon Neshveyev & Tuset

Soit $\mathcal{C}$ une C^*-catégorie tensorielle rigide et $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Hilb}_f$ un foncteur fibré unitaire. Alors il existe un gqc $\mathbb{G}$ et une équivalence monoïdale unitaire $E : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Corep}_f\, \mathbb{G}$ tel que F soit unitairement monoïdalement isomorphe à la composition du foncteur fibré canonique $\mathrm{Corep}_f\, \mathbb{G} \longrightarrow \mathrm{Hilb}_f$ avec E.

[N.B. : Un foncteur tensoriel F est unitaire si $F(T^*) = F(T)^*$ et F_0, F_2 sont unitaires]

De plus, la $*$-algèbre de Hopf $\mathrm{Pol}(\mathbb{G})$ est déterminée à isomorphisme près.

N.B. : $\mathbb{C}H$ et $\mathbb{C}D_4 = \mathbb{C}^4 \oplus M_2$ ne sont pas isomorphes.