22/1/2013

Mikael

Tannaka-Krein (2)

Définition : Une catégorie tensorielle stricte $\mathcal{C}$ est une catégorie telle que

(i) $\mathrm{Mor}(U,V)$ est un espace de Banach et $\|ST\| \le \|S\|\|T\|$ dès que $U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} W$

(ii) Il existe un foncteur contravariant $*$, qui est l'identité sur les objets et si $T \in \mathrm{Mor}(U,V)$, $T^* \in \mathrm{Mor}(V,U)$; $T^{**} = T$; $\|TT^*\| = \|T\|^2$, i.e., ; End(U) est une C^*-algèbre.
(et $T \mapsto T^*$ est antilinéaire)

$T^*T \geq 0$ dans $\mathrm{End}(U)$ dès que $T \in \mathrm{Mor}(U,V)$

(iii) Il existe $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ bifoncteur bilinéaire tel que $(U \otimes V) \otimes W = U \otimes (V \otimes W)$
et il existe $1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ tel que $1 \otimes U = U \otimes 1 = U$ "égalité matérielle", pas seulement isomorphisme.

(iv) est omis et correspond aux diagrammes pentagonaux inutiles dans le cadre strict

(v) $(S \otimes T)^* = S^* \otimes T^*$

(vi) [somme directe] Si $U, V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, il existe W et $u \in \mathrm{Mor}(U,W)$, $v \in \mathrm{Mor}(V,W)$ tels que $uu^* + vv^* = 1$. (pas d'unicité !)

(vii) [sous-objets] Pour tout $p \in \mathrm{End}(U)$ tel que $p = p^* = p^2$, il existe V et $v \in \mathrm{Mor}(V,U)$ isométrie telle que $vv^* = p$.

(viii) $\mathrm{End}(1) = \mathbb{C}$

(ix) [petite catégorie] $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ est un ensemble.

Exemple 1 Hilb_f (mais on enlève le côté strict (iii)) : Si $\mathcal{E}$ est un ensemble d'espaces de Hilbert de dim finie en contenant de toutes dimensions, posons $\mathrm{Ob}(\mathrm{Hilb}_f) = \mathcal{E}$, $\mathrm{Mor}(H,K) = B(H,K)$.

On n'aura pas (iii), (iv).

ex [MacLane] Objets : entiers naturels et $\mathrm{Mor}(n,m) = \mathbb{C}^{m \times n}$.

Étant donnés $a = (a_{ij})_{\substack{i \le n_1 \\ j \le m_1}}$, $b = (b_{ij})_{\substack{i \le n_2 \\ j \le m_2}}$; pour construire $a \otimes b$, on cherche une bijection $[\![1, n_1]\!] \times [\![1, n_2]\!] \to [\![1, n_1 n_2]\!]$. Tentons $(i,i') \mapsto i + n_1(i'-1)$.

A-t-on : $(i,i',i'') \mapsto (i + (i'-1)n_1, i'') \longmapsto (i + (i'-1)n_1 + (i''-1)n_1 n_2)$ oui !
$\longmapsto (i, i' + n_2(n''-1)) \nearrow$

Exemple 2 : $\mathcal{O}_\infty$ [algèbre de Cuntz] est la C^*-algèbre universelle engendrée par une suite d'isométries S_i telle que $\sum_{i \le n}' S_i S_i^* \le 1$ pour tout n.

Alors $\mathcal{E} = \{$ s.e. de dim finie de $\mathcal{O}_\infty$ tels que $x^* y \in \mathbb{C}1$ pour $x, y \in H \}$

et on définit $\langle y, x \rangle$ par $x^* y = \langle y, x \rangle 1$.

Pour chaque n, on pose $H_n = \mathrm{span}(S_1, \dots, S_n)$ et $(\sum \bar{z}_i S_i^*)(\sum z'_j S_j) = \sum\sum \underbrace{S_i^* S_j}_{\delta_{ij} 1} \bar{z}_i z'_j$
$= \langle t', t \rangle$

Si $H_1, H_2 \in \mathcal{E}$, $H_1 \otimes H_2 = \{x_1 x_2 : x_1 \in H_1$ et $x_2 \in H_2\}$ et on a

$$(x_1 x_2)^*(y_1 y_2) = x_2^* \langle y_1, x_1 \rangle y_2 = \langle y_1, x_1 \rangle \langle y_2, x_2 \rangle.$$

<u>Exemple</u> : $G = (A, \Delta)$ un groupe quantique compact, i.e. A est une C^*-algèbre unitale, $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$ telle que $(\Delta \otimes 1) \circ \Delta = (1 \otimes \Delta) \circ \Delta$, et $(A \otimes 1)\Delta(A)$ est dense dans $A \otimes A$, ainsi que $(1 \otimes A)\Delta(A)$

Une coreprésentation de G sur $H \in \mathrm{Hilb}_f$ est $U \in B(H) \otimes A$ inversible.
Nous allons considérer les corep. unitaires, et pose $(1 \otimes \Delta)(U) = U_{12} U_{13}$.
$\mathcal{C}$ définit $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \{U$ corep. unitaire$\}$
[Rappel : si $U \in B(H) \otimes A$, U_{12} est l'opérateur de $B(H) \otimes A \otimes A$ égal à $U \otimes 1_A$; $U_{13} = (1 \otimes \mathrm{flip}) \circ U_{12} \circ (1 \otimes \mathrm{flip})$.

$$\mathrm{Mor}(U, V) = \{T : H_U \to H_V \ : \ (T \otimes 1) U = V (T \otimes 1)\}$$

Alors (i) ✓. On a un foncteur qui à une corep associe l'espace de Hilbert. et identique sur les morphismes.

(ii) Si $T \in \mathrm{Mor}(U, V)$, $U^*(T^* \otimes 1) = (T^* \otimes 1) V^*$ et
$(T^* \otimes 1) V = U (T^* \otimes 1)$ et donc $T^* \in \mathrm{Mor}(V, U)$.

(iii) $U \otimes V = U_{13} V_{23} \in B(H_U \otimes H_V) \otimes C(G)$.

Si $S \in \mathrm{Mor}(U_1, V_1)$, $T \in \mathrm{Mor}(U_2, V_2)$, $S \otimes T \in \mathrm{Mor}(U_1 \otimes U_2, V_1 \otimes V_2)$,

alors $\underbrace{(S \otimes T \otimes 1)}(U_1)_{13}(U_2)_{23}$

$$(1 \otimes T \otimes 1) \underbrace{(S \otimes 1 \otimes 1)(U_1)_{13}}_{(V_1)_{13}(S \otimes 1 \otimes 1)} (U_2)_{23} = (1 \otimes T \otimes 1)(V_1)_{13}(U_2)_{23}(S \otimes 1 \otimes 1)$$
$$= (V_1)_{13}(V_2)_{23}(1 \otimes T \otimes 1)(S \otimes 1 \otimes 1)$$
$$= (V_1 \otimes V_2)(S \otimes T \otimes 1).$$

(v) déjà fait au niveau des espaces de Hilbert.

(vi) $U, V \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Corep}\, G)$. (vi) appliqué à H_U et H_V dans Hilb_f donne H et
$u : H_U \to H$, $v : H_V \to H$ isométries telles que $uu^* + vv^* = 1$ et on définit $W \in B(H) \otimes A$
par $W = \begin{pmatrix} U & \\ & V \end{pmatrix}$ et $1_{B(H)} \otimes \Delta(W) = \begin{pmatrix} 1 \otimes \Delta(U) & \\ & 1 \otimes \Delta(V) \end{pmatrix}$
$= W_{12} W_{13}$

$W \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Corep}\, G)$ et $u \in \mathrm{Mor}(U, W)$.

(vii) Si on a U, $p \in End(U)$ projection : $p \in B(H_U)$ et par (vii) pour $Hilb_f$ on a H et $v : H \to H_U$ isométrie telle que $Im\, v = p(H_U)$.

On pose $V = (v^* \otimes 1)\, U\, (v \otimes 1) \in B(H) \otimes A$

et $VV^* = (v^* \otimes 1)\, \underbrace{U\, (\underbrace{vv^*}_{p} \otimes 1)}_{(p\otimes 1)U}\, U^*\, (v \otimes 1) = (v^* p v) \otimes 1 = 1$
$\quad v^* v = 1$.

De même $V^* V = 1$ et donc V est unitaire.

$\underset{B(H)\otimes A}{(1 \otimes \Delta)(V)} = (v^* \otimes 1_A \otimes 1_A)(U_{12} U_{13})(v \otimes 1_A \otimes 1_A)$.

on a envie de mettre ici $p \otimes 1 \otimes 1$: or $U_{12}(p \otimes 1 \otimes 1) = [U(p \otimes 1)] \otimes 1 = [(p \otimes 1)U] \otimes 1$

Or $(v^* \otimes 1 \otimes 1)(p \otimes 1 \otimes 1) = (v^* \otimes 1 \otimes 1)$

Vérifions que $v \in Mor(V, U)$: $(v \otimes 1)V = (p \otimes 1)\, U\, (v \otimes 1) = U(\overset{v}{\overset{\shortparallel}{pv}} \otimes 1) = U(v \otimes 1)$

$\mathbb{1} = 1_A \in B(\mathbb{1}_{Hilb_f}) \otimes A$.

Déf : un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est tensoriel si $F : Mor(U,V) \to Mor(F(U), F(V))$ est linéaire. Alors il existe $F_0 : \mathbb{1}' \to F(\mathbb{1})$ isomorphisme

$F_2 : F(U) \otimes F(V) \to F(U \otimes V)$ tel que

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & F(U)\otimes F(V)\otimes F(W) \arrow[dl, "F_2 \otimes Id"'] \arrow[dr, "1\otimes F_2"] & \\
F(U\otimes V)\otimes F(W) \arrow[dr, "F_2"'] & & F(U)\otimes F(V\otimes W) \arrow[dl, "F_2"] \\
 & F(U\otimes V\otimes W) &
\end{tikzcd}$$

et F est dit unitaire si $F(T^*) = F(T)^*$, F_2, F_0 unitaires.

F, G foncteurs tensoriels $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$. Une isométrie naturelle $\eta : F \to G$ est monoïdale si

$$\begin{tikzcd}
F(U)\otimes F(V) \arrow[r] \arrow[d, "\eta\otimes\eta"'] & F(U\otimes V) \arrow[d, "\eta"] \\
G(U)\otimes G(V) \arrow[r] & G(U\otimes V)
\end{tikzcd}$$

pour tout U et $\eta_U : F(U) \to G(U)$

et

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbb{1}' \arrow[dl, "F_0"'] \arrow[dr, "G_0"] & \\
F(1) \arrow[rr, "\eta"] & & G(1)
\end{tikzcd}$$

et $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ sont monoïdalement équivalents s'il existe

$F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$
$G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ tels que FG est monoïdal^t isomorphe à $id_{\mathcal{C}'}$ (et si η est unitaire)
$GF \longrightarrow id_{\mathcal{C}}$

(On ne peut pas supposer que F_2 soit l'identité ; on peut toujours s'arranger pour que F_0 soit l'identité)

Déf. $\overline{U} \in Ob(\mathcal{C})$ est appelé objet conjugué à $U \in Ob(\mathcal{C})$ si $\exists \overline{R} : 1 \to U \otimes \overline{U}$, $\exists R : 1 \to \overline{U} \otimes U$

tels que $U \xrightarrow{1 \otimes R} U \otimes \overline{U} \otimes U \xrightarrow{\overline{R}^* \otimes 1} U$ et $U \xrightarrow{\overline{R} \otimes 1} U \otimes \overline{U} \otimes U \xrightarrow{1 \otimes R^*} U$

sont tous deux l'identité.

<u>Théorème</u> de Tannaka-Krein [Woronowicz] Soit $\mathcal{C}$ une catégorie tensorielle stricte avec conjugués, $F : \mathcal{C} \to Hilb_f$ un foncteur fibré (injectif sur les morphismes et exact). Alors il existe $G = (A, \Delta)$ g.q.c. et $E : \mathcal{C} \to \text{corep } G$ une équivalence unitaire monoïdale telle que F est unitairement monoïdalement isomorphe à la composée de $\text{corep } G \to Hilb_f$ et E. De plus, $(\mathbb{C}[G], \Delta)$ est déterminé par F.

(On va voir que les axiomes imposent la dim finie)

Si $U \in \text{corep } G$, alors U^c corep contragrédiente est la corep non unitaire de G sur $H_U^* \cong \overline{H_U}$ définie par $U^c = j \otimes 1 (U^{-1})$ où $j : B(H_U) \to B(H_U^*)$ est l'adjoint.

Fait : $(1 \otimes \Delta)(U^c) = (U^c)_{12} (U^c)_{13}$

Difficile : U^c est inversible.

De plus, il existe $\rho_U \in Mor(U, U^{cc})$, $\rho_U \geq 0$, $Tr(\rho_U \cdot) = Tr(\rho_U^{-1} \cdot)$ sur $End(U)$;
i.e., $\rho_U : H_U \to H_U^{**} = H_U$

$\overline{U} = (j(\rho_U)^{\frac{1}{2}} \otimes 1) U^c (j(\rho_U)^{-\frac{1}{2}} \otimes 1)$, $\overline{U} \in \text{Corep}(G)$ (unitaire)

[Dans le cas Kac, à trace, $\rho = Id$]

<u>Lemme</u> : $\overline{U}$ est un objet conjugué

Auparavant, <u>Lemme</u> : $Hilb_f$ est à conjugués :

Dém : Si $H \in Hilb_f$, considérons $\overline{H}$ un espace isomorphe à H^*, dans $Hilb_f$.
On a $\overline{H} \otimes H \simeq B(H)$ et on définit $r : \mathbb{1} \to \overline{H} \otimes H$ tel que $r(1) = id_H$,
$r(1) = \sum \overline{e_i} \otimes e_i$, $\overline{r}(1) = id_H$, $\langle (\overline{r}^* \otimes 1)(1 \otimes r)(\overset{H}{\xi}), \overset{H}{\eta} \rangle = \langle (1 \otimes r)\xi, (\overline{r} \otimes 1)\eta \rangle$
$= \langle \sum_i \xi \otimes \overline{e_i} \otimes e_i, \sum_j e_j \otimes \overline{e_j} \otimes \eta \rangle_{H \otimes \overline{H} \otimes H} = \sum_i \langle \xi, e_i \rangle \langle e_i, \eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$

<u>Dém du lemme :</u> $i : \mathrm{Mor}(1, U \otimes U^c) \hookrightarrow B(H_U)$

$\left(f : \mathbb{C} \to \underbrace{H_U \otimes \overline{H_U}}_{\simeq B(H_U)}\right) \longmapsto f(1)$. Alors l'image de i égale $\mathrm{End}(U)$.

$T : H_U \to H_U$ correspond à $\tilde{T} : \mathbb{C} \longrightarrow H_U \otimes \overline{H_U}$

et $T \in \operatorname{im} i \iff (\tilde{T} \otimes 1) 1_{\mathbb{C}} \otimes 1_A = \underbrace{(U \otimes U^c)}_{U_{13} (U^c)_{23}} (\tilde{T} \otimes 1)$

Si on prend (e_i) b.o. de H_U, cela équivaut à $\sum' T_{ij}\, e_i \otimes \overline{e_j} \otimes 1_A = \sum' U_{13} U^c_{23} (T_{ij} e_i \otimes \overline{e_j} \otimes 1)$

Écrivons $U = (U_{ij}) \in M_n(A)$ et $U^c = (U_{ij}^*)$ dans la base $(\overline{e_i})$. Alors

$U^c(\overline{e_j} \otimes 1) = \sum'_k e_k \otimes u_{kj}^*$ et $U_{13} U^c_{23} (e_i \otimes \overline{e_j} \otimes 1) = \sum'_k U_{13}(e_i \otimes \overline{e_k} \otimes U_{kj}^*)$

$= \sum'_k \sum'_l e_l \otimes \overline{e_k} \otimes (u_{li} u_{kj}^*)$

Rappel : $T \in \mathrm{Im}(i) \iff \forall k, l \quad \sum'_i \sum'_j T_{ij}\, U_{li} U_{kj}^* = T_{lk} 1_A$

Or $T \in \mathrm{End}(U) \iff T \otimes 1 = U (T \otimes 1) U^*$ $\blacksquare$

$\bar{r} : 1 \longrightarrow H_U \otimes \overline{H_U}$ est bien dans $\mathrm{Mor}(1, U \otimes U^c)$ car $\mathrm{Id}_{H_U} \in \mathrm{End}(U)$.

On définit $\overline{R} = (1 \otimes j(\rho_U)^{1/2}) \bar{r} : 1 \longrightarrow H_U \otimes \overline{H_U}$ et $R = (1 \otimes j(\rho_{\overline{U}})^{1/2}) r$.

et on a $\rho_{\overline{U}} = j(\rho_U)^{-1}$. Vérifions que $\overline{R} \in \mathrm{Mor}(1, U \otimes \overline{U})$:

$(U \otimes \overline{U})(\overline{R} \otimes 1) = U_{13} (1 \otimes j(\rho_U)^{1/2} \otimes 1) U^c_{23} (\bar{r} \otimes 1)$

$= \overline{R}\, 1$

Vérifions : $(\overline{R}^* \otimes 1)(1 \otimes R) = (\bar{r}^* \otimes 1)(1 \otimes j(\rho_U)^{1/2} \otimes 1) \circ (1 \otimes 1 \otimes j(\rho_U)^{1/2})(1 \otimes r)$

suspense.