

Tannaka-Krein (suite)

Souvent donné: $\mathcal{C}$ une C^* -catégorie tensorielle stricte avec conjugué
 $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Hilb}_{\mathbb{C}}$ foncteur unitaire ^{tensoriel} qui est injectif sur les morphismes
 (i.e., fidele; c'est automatique)
 (lié à la positivité stricte: $FF^* = 0 \rightarrow F = 0$)

But: construire un groupe $q.$ en construisant une C^* -algèbre de Hopf.

Rappel: Si $U \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, $\bar{U}$ est un conjugué de U si $\exists R: 1 \rightarrow \bar{U} \otimes U$ tel que $\bar{R}: 1 \rightarrow U \otimes \bar{U}$
 et $U \xrightarrow{1 \otimes R} U \otimes \bar{U} \otimes U \xrightarrow{\bar{R}^* \otimes 1} U = U \xrightarrow{\bar{R} \otimes 1} U \otimes \bar{U} \otimes U \xrightarrow{1 \otimes \bar{R}} U = \text{Id} \quad (*)$

Th: [réciprocité de Frobenius] $\forall U, V, W \quad \text{Mor}(U \otimes V, W) \xrightarrow{\sim} \text{Mor}(V, \bar{U} \otimes W)$

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\quad} & (1_U \otimes T)(R \otimes 1_V) \\ & \searrow & \uparrow \\ & & \bar{U} \otimes U \otimes V \\ & & (\bar{R}^* \otimes 1_W)(1_U \otimes S) \longleftarrow S \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } T \in \text{Mor}(U \otimes V, W), & (R^* \otimes 1_W)(1_U \otimes 1_{\bar{U}} \otimes T)(1_U \otimes R \otimes 1_V) \\ & = T \circ (\bar{R}^* \otimes 1_U \otimes 1_V)(1_U \otimes R \otimes 1_V) \\ & \stackrel{(*)}{=} T \circ (1_U \otimes 1_V) \end{aligned}$$

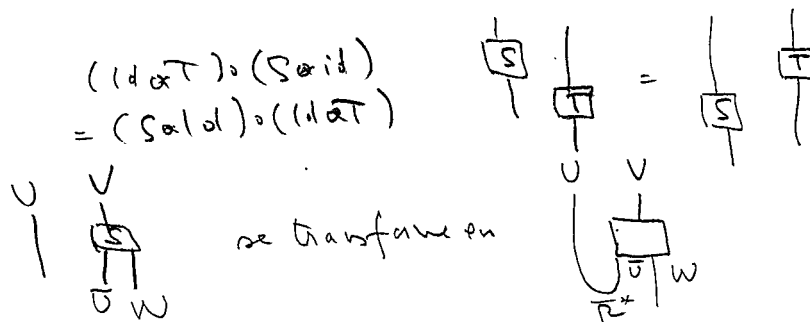
De même, $\text{Mor}(U \otimes V, W) \simeq \text{Mor}(U, W \otimes \bar{U})$.

Diagramme:
$$\begin{array}{c} \bar{R} \\ \cup \\ U \end{array} \begin{array}{c} \bar{U} \\ \cup \\ R^* \end{array} = | = \cup$$

Car R a pour symbole $\bar{R} \otimes 1_U$ ^{renvoie input}
 $\cup \otimes \bar{U}$

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} V \otimes W \otimes X \\ Y \otimes Z \end{array}$$

De même $(\text{Id} \otimes T) \circ (S \otimes \text{Id}) = (S \otimes \text{Id}) \circ (\text{Id} \otimes T)$



Prop: $\forall U \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ $\text{End}(U)$ est de dimension finie.

Dém: prenons $\bar{U}, R, \bar{R}$ comme dans $\circledast$ et définissons $\varphi_U: \text{End}(U) \rightarrow \mathbb{C}$
 Soit $T \in \text{End}(U)$ et posons $\varphi_U(T) = \text{Tr}_U(T)$

$$\varphi_U(T): 1 \xrightarrow{R} U \otimes \bar{U} \xrightarrow{1 \otimes T} U \otimes \bar{U} \xrightarrow{R^*} 1 : \text{ce morphisme est dans } \mathbb{C}$$

$$\varphi_U(T): 1 \xrightarrow{\bar{R}} U \otimes \bar{U} \xrightarrow{T \otimes 1} U \otimes \bar{U} \xrightarrow{\bar{R}^*} 1$$

Remarque anticipative: on montrera: Pour tous $U, \bar{U}$, il existe R et $\bar{R}$ tels que $\varphi_U = \varphi_{\bar{U}}$ et une trace qui ne dépend pas de $(R, \bar{R}), \bar{U}$.
 Prenons $Y = (1_U \otimes 1_{\bar{U}} \otimes T) (1_U \otimes R) \in \text{Mor}(U, U \otimes \bar{U} \otimes U)$

Alors $T = (\bar{R} \otimes 1) Y$

$$T^* T = Y^* (\bar{R} \bar{R}^* \otimes 1) Y \leq \| \bar{R} \|^2 Y^* Y$$

$\in \text{Mor}(U \otimes \bar{U})$

$$+ Y^* Y = 1_U \otimes (R^* (1_{\bar{U}} \otimes T^* T) R) \quad \text{Ainsi } T^* T \leq \| \bar{R} \|^2 \varphi_U(T^* T) 1$$

$\varphi_U(T^* T)$ et donc $\varphi_U(X) \geq \frac{1}{\| \bar{R} \|^2} \| X \|^2$ pour tout $X \geq 0$.

(Exercice) : $\text{End}(U)$ est de dimension finie.

Corollaire: Tout objet de $\mathcal{B}$ est somme directe d'objets simples. Un seul que $\text{End}(U) = \mathbb{C}$.

Dém: $\text{End}(U)$ est une C^* -algèbre de dim finie et il existe une famille (p_i) de projections telle que $\sum p_i = 1$ et $p_i \text{End}(U) p_i = \mathbb{C} p_i$.
 (ici on réfère au point (iii) sur la somme directe.)

Def-th: Un tel couple $(R, \bar{R})$ est appelé standard. On note alors $\varphi_U = \varphi_{\bar{U}} = \text{Tr}_U$.

De plus, $\text{Tr}_U(ST) = \text{Tr}_V(TS)$ si $V \xrightarrow{S} U$ et $U \xrightarrow{T} V$

On note $\text{End}(F) = \text{Nat}(F, F)$ et on aura $\eta \in \text{End}(F) \iff \forall U \in \text{Ob}(\mathcal{B}) \exists \eta_U \in \text{Mor}(F(U))$
 i.e. η se comporte comme l'identité.

Fait: Si (U_α) est une famille de représentations dans chaque classe d'isomorphisme d'objets simple, $\text{End}(F) \simeq \prod B(F(U_\alpha))$

$$\eta \longmapsto (\eta_{U_\alpha})_\alpha$$

On définit alors $\mathcal{A} \subseteq \text{End}(F)^*$
 $\mathcal{A} = \bigoplus B(F(U_\alpha))^*$

On va le munir d'un coproduit: $\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, $\Delta(a)(\omega \otimes \eta) = a(\omega \eta)$

(la structure "coproduit" sur $\text{End}(F)$ est donnée par:

$$\forall U, V \in \text{Ob}(\mathcal{B}) \forall \eta \in \text{End}(F) \quad (g(\eta))_{U,V}: F(U) \otimes F(V) \rightarrow F(U) \otimes F(V)$$

Notamment, " $g: \text{End}(F) \rightarrow \text{End}(F)^{\otimes 2}$ "

$$\text{En fait, } g: \text{End}(F) \rightarrow \prod_{\alpha, \beta} B(F(U_\alpha)) \otimes B(F(U_\beta))$$

On pose pour $a, b \in A$ $ab(\eta) = (a \otimes b)(\delta(\eta))$

Dire que le produit est associatif, c'est dire que δ est coassociatif.

La counité est $\varepsilon(a) = a(1)$ où 1 est l'élément tel que $\eta_U = 1_U$ pour tout U .

Il reste à définir S l'antipode et $a \mapsto a^*$.

Faisons un exemple: Qu'a-t-on fait lorsque $\mathcal{G} = \text{corep } G$ et $F(U) = H_U$

Rappel: U coreprésentation de G sur $H_U \in \text{Hilb}_\mathbb{C}$: $U \in \mathcal{U}(B(H_U) \otimes A)$

et $\text{Mor}(U, V) = \{T \in B(H_U, H_V) : (T \otimes 1)U = V(T \otimes 1)\}$. Alors

$$F(U) := H_U \quad \text{et} \quad F\left(\underset{\text{Mor}(U, V)}{\uparrow} T\right) := T : A \simeq \text{Pol}(G) = \text{span}[\text{coeff de } \text{corep de } G] \simeq A.$$

$$\text{et } \{\text{coeff de } U\} = \{a \otimes \text{id}(U) : a \in B(H_U)^*\}$$

$$= \bigoplus_{\alpha} \{a \otimes \text{id}(U_{\alpha}) : a \in B(H_{U_{\alpha}})^*\}$$

$$\simeq \text{Pol}(G) \quad \text{mauvaise notation ; mieux : } \text{Pol}(G)$$

Rappel: l'antipode S est caractérisé par $1 \otimes S(U) = U^{-1}$, c à d

$$S(U_{ij}^{\alpha}) = U_{ji}^{\alpha*}$$

Idee: on a vu comment obtenir $\bar{U}$ à partir de U^{-1} . Deroulons le procédé.

pour faire la réciproque! On aura en même temps l'adjoint U^c .

Pour $U \in \text{corep } G$ et j l'adjoint $B(H_U) \rightarrow B(H_{\bar{U}})$, $U^c := (j \otimes 1)(U^{-1})$

est une coreprésentation unitaire. On avait montré l'existence d'un unique

$\rho_U \in \text{Mor}(U, U^c) \geq 0$ tel que $\text{Tr}(\cdot \rho_U) = \text{Tr}(\cdot \rho_{U^{-1}})$ sur $\text{End}(U)$:

$$\bar{U} := (j(\rho_U)^{1/2} \otimes 1) U^c (j(\rho_U)^{-1/2} \otimes 1)$$

$$\text{On a voit défini } \bar{R} = (1 \otimes j(\rho_U)^{1/2}) \bar{r} \quad \text{où } \bar{r} : 1 \rightarrow H_U \otimes H_{\bar{U}} \xleftarrow{\text{id}} H_U$$

$$R = (1 \otimes j(\rho_U)^{1/2}) r$$

Revenons au cas général: pour tous $U, \bar{U}, R, \bar{R}$ tels que $\oplus$, on a un isomorphisme

$$\text{linéaire } \text{Mor}(U, V) \xrightarrow{T} \text{Mor}(\bar{U}, \bar{V}). \quad \text{Or } \text{Mor}(U, V) \simeq \text{Mor}(1, \bar{U} \otimes V)$$

$$\text{et } \text{Mor}(\bar{U}, \bar{V}) \simeq \text{Mor}(1, \bar{U} \otimes \bar{V}) \quad (\text{on a choisi } R_U, \bar{R}_U)$$

À partir de maintenant, on suppose que $R_U, \bar{R}_U$ est tel que $\rho_U = \text{Tr}_U$ pour tout U .

Lemme: [pour construire l'antipode; 2.3.3] Pour tout $\eta \in \text{End}(F) \exists ! \check{\eta} \in \text{End}(F)$

tel que si $R, \bar{R}$ satisfait $\oplus$ pour $U, \bar{U}$ et si $\check{\eta}(R) = F_2^*(F(R))$, où $F(1) = 1 \xrightarrow{F(R)} F(\bar{U} \otimes U)$ et si $\check{\eta}(\bar{R}) = F_2^*(F(\bar{R}))$, alors $(\check{\eta})_{\bar{U}} = \otimes_U^*$ où $\text{End}(U) \xrightarrow{T} \text{End}(\bar{U})$ est défini par $F(U) \otimes F(U) \xrightarrow{F_2^*} F(U)$

