

Not : (A, Δ) GQC $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$

Δ $\ast$ -alg. de Hopf (unique) Δ des $\ast$ -alg. des $\ast$ -alg. unitaires

$$\Delta : A \rightarrow A \otimes A$$

$$\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{C} \text{ linéaire } (\varepsilon \otimes \text{id}) \Delta = (\text{id} \otimes \varepsilon) \Delta = \text{id} \Delta$$

$$K : A \rightarrow \mathbb{C} \text{ linéaire } m(K \otimes \text{id}) \Delta = m(\text{id} \otimes K) \Delta = \varepsilon(\cdot) 1$$

$\varepsilon \ast$ -hom

K antihomomorphisme

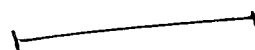
$$\text{span}(A \otimes 1) \Delta A = \text{span}(1 \otimes A) \Delta A = A \otimes A$$

$$h \text{ état de Haar sur } (A, \Delta) : (h \otimes \text{id}) \Delta(a) = h(a) 1 = (\text{id} \otimes h) \Delta(a)$$

Admettons : h est fidèle sur les $\ast$ -alg. de Hopf ($h(a^*a) = 0 \iff a = 0$)

$$N_h = \{ a \in A \mid h(a^*a) = 0 \} \text{ idéal bilatère de } A.$$

(KNS tokerobi...)



① - Groupe quantique compact réduit

$$A_r = A / N_h \cong \pi(A) \text{ où } \begin{pmatrix} \pi \\ h \\ \bar{\varepsilon} \end{pmatrix} \text{ est la GNS associée à } h \text{ car } N_h \text{ idéal bilatère (Ker } (\pi) = N_h)$$

On note $\theta : A \rightarrow A_r$, application quotient.

Thm : (A, Δ) GQC, A_r peut être muni d'une structure de GQC.

• multiplication $\Delta_r(\theta(a)) = (\theta \otimes \theta) \Delta(a) \quad a \in A.$

• état de Haar : $h_r(\theta(a)) = h(a)$ fidèle (!)

• $\theta \ast$ fidèle sur A

• $\theta(A) = \ast$ alg de Hopf de A_r .

avec $\varepsilon_r = \varepsilon \circ \theta$

• antipode $\theta \circ K = K_r \circ \theta$

Preuve: - h passe au quotient (!) et h_r est fidèle sur A_r
(d'où le def^0 de h_r)

Δ_r bien définie si: $\text{Ker } \theta \subset \text{Ker } ((\theta \otimes \theta) \Delta)$

$$\begin{aligned} \text{Soit } a \in A \text{ tq } \theta(a) = 0 \text{ alors } (h_r \otimes h_r) [(\theta \otimes \theta) \Delta(a)] &= (h \otimes h) \Delta(a) \\ a \neq 0 &= h((\text{id} \otimes h) \Delta(a)) = h(h) = 0 \text{ car } \theta(a) = 0. \end{aligned}$$

Puisque h_r est fidèle, alors $h_r \otimes h_r$ est fidèle sur $A_r \otimes A_r$, d'où
 $(\theta \otimes \theta) \Delta(a) = 0$.

$$\begin{aligned} - \Delta \text{ coassoci. sur } A : \forall a \in A \quad (\text{id} \otimes \Delta) \Delta(a) &= (\Delta \otimes \text{id}) \Delta(a) \text{ d'où} \\ (\theta \otimes \theta \otimes \theta) ((\text{id} \otimes \Delta) \Delta(a)) &= (\theta \otimes \theta \otimes \theta) ((\Delta \otimes \text{id}) \Delta(a)) \\ &\Downarrow \\ (\theta \otimes \Delta_r \otimes \theta) \Delta(a) &= \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \text{prop. d'annulation: } (1 \otimes \Delta(A_r)) \Delta(A_r) &= \{ (1 \otimes \theta(a)) \Delta(a) \mid a, b \in A \} \\ &= \{ (\theta \otimes \theta) ((1 \otimes A) \Delta(A)) \} \\ &\parallel \text{lin. cont sur } A_r \otimes A_r \rightarrow A_r \otimes A_r \dots \\ &\text{universel} \end{aligned}$$

$\leadsto (A_r, \Delta_r)$ GAC.

* θ est fidèle sur A_r car h fidèle sur A . $\leadsto \text{def}^0 \in \mathcal{K}_r$. $\xrightarrow{\quad}$

* h_r est l'état de Haar sur (A_r, Δ_r) : $(\text{id} \otimes h_r) \Delta(a) = h(a) 1$

$(\theta(A), \Delta_r, \varepsilon_r, \mathcal{K}_r)$ est alg. de Hopf de (A_r, Δ_r) . □

② Comoyennabilité

Def: $(A, \Delta) \in \text{GAC}$. (A, Δ) est comoyennable lorsque la courbe ε $\hookrightarrow (A, \Delta_r)$ est bornée (après: $\varepsilon, \text{mult} \circ \Delta(\varepsilon) = \Delta_r$).

Rq: Si (A, Δ) comoyennable alors ε_r (et aussi ε) s'étendent en des courbes sur A_r (resp. A). (à construire)

TH1: (A, Δ) est comoyennable ssi h fidèle et ε bornée.

Preuve: $\Rightarrow$ Si h est fidèle alors $A_r = A$

ε bornée $\Rightarrow \varepsilon_r$ aussi car $\varepsilon = \varepsilon_r$!

$\Rightarrow$ $\hookrightarrow$ h fidèle (mult) Soit $a \in N_h$. On a $\forall \tau \in S(A)$ (étot) on a $(\tau \otimes \text{id}) \Delta(a) \in N_h$.

$$\hookrightarrow \underbrace{(\tau \otimes h)}_{\text{étot}} \Delta(a \otimes 1) = \tau(h(a \otimes 1_2)) = 0 \text{ donc}$$

donc $\Delta(a) \in N_{\text{tot}}$ i.e. $\forall c \in A \otimes A$ $(\varepsilon \otimes h)(\Delta(a) \otimes c) = 0$

D'a) $(\tau \otimes h) h((\tau \otimes \text{id})(\Delta(a) \otimes c)) = 0$. On prend $c = 1 \otimes b \in \text{domaine multiplicatif}$ de l'application UCP $\tau \otimes \text{id} \leadsto h((\tau \otimes \text{id}) \Delta(a) \otimes b) = 0 \quad \forall b \in A$.

D'a) $(\tau \otimes \text{id}) \Delta(a) \in N_h$.

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Alors } \tau(a) &\stackrel{\varepsilon}{=} \tau((\text{id} \otimes \varepsilon) \Delta(a)) \stackrel{\varepsilon \text{ bornée sur } A}{=} \varepsilon((\tau \otimes \text{id}) \Delta(a)) \\ &= \varepsilon_r \circ \underbrace{(\tau \otimes \text{id}) \Delta(a)}_{=0 \text{ car } \varepsilon \in N_h} \quad \text{d'a' } \underline{\tau(c) = 0 \quad \forall c \in S(A)} \end{aligned}$$

D'a) $a = 0$. Donc h fidèle

TH2: $(A, \Delta) \in \text{GAC}$. $\iff h$ fidèle

① la courbe est bornée

$\Uparrow$

② $\exists$ section $\tau: A \rightarrow \mathbb{C}$ (fidèle) $\Rightarrow$ comoyennable

(*)

Lemme: $(A, \Delta) \in \mathcal{QC}$ tq h fidèle. Soit $\pi: A \rightarrow B \in \mathcal{C}^*$ -alg $\neq \text{ham} \neq 0$
 || alors $\hat{\pi}: A \rightarrow A \otimes B, a \mapsto (id \otimes \pi) \Delta(a)$ est isométrique.
preuve: $a \in A_+ \mapsto \hat{\pi}(a) = 0$.
 $(h \otimes id)[(id \otimes \pi) \Delta(a)] = \pi((h \otimes id) \Delta(a)) = \pi(h(a)1) = h(a)\pi(1)$
 $\stackrel{0}{=} \text{d'où } h(a) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow (is(1 \otimes h))$

Preuve (THM): ① $\Rightarrow$ ② clair
 ② $\Rightarrow$ ③: $\hat{\tau} = (id \otimes \tau) \Delta(\cdot)$ isométrie par lemm.

- Arg $\hat{\tau}(A) = A$. On a alors: $\left\{ \begin{array}{l} |E(\hat{\tau}(a))| = |\tau(a)| \leq \|a\| \text{ pour } a \in A \\ \left\{ \begin{array}{l} \tau(a) \\ \tau(b) \end{array} \right\} \text{ car } \tau(1) = id - (A_1, \dots) \end{array} \right\} \Rightarrow E \text{ borné sur } A$
 On prouve: Soit M sous-unitaire (un. d.) $(U_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ de (A, Δ)

Alors: $\hat{\tau}(U_{ij}) = (\tau \otimes id) \Delta(U_{ij}) = \sum_k U_{ik} \tau(U_{kj})$

On fixe i et $\tau(U_{kj})$ unitaire de M_N donc

$\sum_j \tau(U_{kj}) \overline{\tau(U_{kj})} = Id_N$ Donc $\sum_j \hat{\tau}(U_{ij}) \overline{\tau(U_{kj})} = \dots$
 $= \sum_{k=1}^N U_{ik} Id_N = U_{i\cdot}$ d'où $\hat{\tau}(A) \supseteq A$.

$A \subset \hat{\tau}(A)$ d'où $\hat{\tau}(A) = A$.

Corollaire: $(A, \Delta) \in \mathcal{QC}$. L'assé

① (A, Δ) commutatif ② $\exists$ caractère $A \rightarrow \mathbb{C}$ ③ $|A|$ est un $\mathbb{C}$ -alg
 fidèle sur (A, Δ) et $\exists$ caractère $\tau: A \rightarrow \mathbb{C}$.

Preuve: ① $\Leftrightarrow$ ② $\text{thm}^{(2)}$ $\hat{\tau}$ fidèle sur A .

① $\Rightarrow$ ③ immédiate.

③ $\Rightarrow$ ① ($A = A_1$)