

Rappel $\mathcal{C}$ $\mathcal{C}^*$ -catégories strictes avec conjugués $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Hilb}$ foncteur. FKW ①

Alors $\text{Mor}(U)$ est de dim finie $\forall U$.

$\rightarrow S: (U_\alpha)$ une famille de chaque classe d'objets simples ($\text{Mor}(U_\alpha) = \mathbb{C}$)
 Tout U se décompose en somme directe de (U_α)

$\text{End}(F) \cong \prod B(F(U_\alpha))$ — construire.

$$\mathcal{A} := \bigoplus_\alpha B(F(U_\alpha))^* \xrightarrow[\rightarrow \varepsilon, S]{\rightarrow \text{mult.}, \Delta} \subseteq \text{End}(F)^*$$

But: Donner $\mathcal{A}$ d'une structure de $*$ -alg. de Hopf.

m = multiplication sur $\text{End}(F)$

$$\Delta S = \text{comultiplication } \forall \gamma \in \text{End}(F): \begin{array}{ccc} F(U \otimes V) & \xrightarrow{M_{U \otimes V}} & F(U \otimes V) \\ \uparrow F_1 & \nearrow & \uparrow F_2 \\ F(U) \otimes F(V) & \xrightarrow{\varepsilon(\gamma)|_{U \otimes V}} & F(U) \otimes F(V) \end{array}$$

$$\Delta(\gamma) \in \prod_{\alpha, \beta} B(F(U_\alpha)) \otimes B(F(U_\beta)).$$

Multiplication sur $\mathcal{A}$: $a \cdot b \rightsquigarrow a \cdot b(\gamma) = (a \otimes b) \Delta(\gamma)$
 $\downarrow \pi$ $\pi(a \otimes b) = (a \otimes b) \delta$

Comult sur $\mathcal{A}$: $\Delta(a)(u \otimes \gamma) = a(u\gamma)$
 $\downarrow \Delta$ $\Delta(a) = a \cdot m$

Comult: $\varepsilon(a) = a(1)$

1 = transp. identité $M_U = U \forall U$.

Prop: $\Delta(ab) = \Delta(a) \Delta(b)$

Prop Le $*$ d'antipode: $\gamma \mapsto \gamma^v$ est caractérisée par
 $\forall U, V, R, \bar{R} (*)$, on a $\left[\begin{pmatrix} \gamma^v \end{pmatrix}_U \otimes 1_V \right] \underbrace{\theta(R)}_{F_2^* F(\bar{R})} = (1_U \otimes \gamma_V) \theta(\bar{R}).$

On peut alors définir antipode $S(a) \in \mathcal{A} / S(a) \varepsilon(\gamma) = a(\gamma^v) /$ adjoint $a^*(\gamma) = \overline{a(\gamma^{v*})}.$
 $S: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

- A verifier $(ab)^* = b^* a^*$, $(a^*)^* = a$. //
- Et: $M(S \otimes id) \Delta(a) = \varepsilon(a) 1$

cf d'une source def T^V .

Preuve: $- a^{**} = a$. $T \in \text{Nor}(U, V)$

$$\left(\begin{array}{c} T^{V*V} \\ \text{morph } (0) \\ \text{v} \downarrow \\ T \end{array} \right) = T$$

mg $(1 \otimes T^{V*V}) R_U = \left[R_U^* (1 \otimes T^{V*V}) \right]^*$

$$= \left[R_V^* (T^{V*} \otimes 1) \right]^*$$

$$= (T^V \otimes 1) R_V = (1 \otimes T) R_U$$

? $\Rightarrow T^{V*V*} = T$
 can determine $T \dots$

d'a (...) $a^{**} = a$.

$- \Pi(S \otimes id) \Delta(a) = \varepsilon(a) 1$.

$(S \otimes id) a m \varepsilon = \varepsilon(a) 1 \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ($1(a) = m(1)$)

$\forall \gamma \in \text{End}(E)^{**}$ $S(\gamma) = \gamma_{(1)} \otimes \gamma_{(2)}$ ($\hat{=} (S(\gamma))_{U,V} = \sum_i \gamma_{(1,i)} \otimes \gamma_{(2,i)}$)

$\uparrow \quad \uparrow$
 $\mathcal{B}(F(U)) \quad \mathcal{B}(F(V))$

$\hat{=} \Rightarrow \gamma_{(1)} 1 = \gamma_{(1)} \gamma_{(2)}$