

## Comoyennabilité (suite)

Def.:  $(A, \Delta)$  g.q.c. et comoyennable si la counité de  $(A_r, \Delta_r)$ , le groupe quantique compact réduit, est bornée.

Caractérisation:  $(A, \Delta)$  est comoyennable ssi l'état de Haar  $h$  de  $(A, \Delta)$  est fidèle et la counité est bornée.

Illustration:  $\Gamma$  groupe discret,  $\lambda: G \rightarrow B(\ell^2(G))$  la régulière gauche.

$C_r^*(\Gamma)$  est la  $C^*$ -algèbre engendrée par les  $\lambda_r, r \in \Gamma$ .  $\Delta: C_r^*(\Gamma) \rightarrow C_r^*(\Gamma)^{\otimes 2}$   
 la comultiplication, est bien définie  
 $\lambda_r \mapsto \lambda_r \otimes \lambda_r$   
 car  $\lambda \otimes \lambda$  est unitairement équivalent à  $\text{id} \otimes \lambda$ : c'est le principe d'absorption de Fell.

On vérifie alors que  $(C_r^*(\Gamma), \Delta)$  est un GQC. (voir la présentation d'Uwe)

La  $*$ -algèbre de Hopf est  $\text{span} \{ \lambda_r : r \in \Gamma \} = C(\Gamma)$ , la counité  $\varepsilon(\lambda_r) = 1$  et l'antipode  $K(\lambda_r) = \lambda_{r^{-1}}$ .

La  $C^*$ -algèbre universelle  $C^*(\Gamma)$  est  $\overline{\text{span}} \{ u_r : r \in \Gamma \}$ , où  $u$  est la représentation universelle [la vraie définition, la voici:  $\pi_u = \bigoplus_{\pi} \pi : \pi \text{ rep. unitaire de } \Gamma \text{ sur } \ell^2(\Gamma)$ ]  
 est une représentation unitaire de  $\Gamma$  sur  $\bigoplus_{\pi} H_{\pi} = H_u$  et  $C^*(\Gamma) = \overline{\text{span}} \{ \pi_u(r) : r \in \Gamma \}$  dans  $B(H_u)$ .  
 Voici la propriété universelle: si  $\pi$  est une rep. unitaire de  $\Gamma$  sur  $K$ , il existe un unique  $*$ -homomorphisme  $\varphi: C^*(\Gamma) \rightarrow B(K)$  tel que  $\varphi(u_r) = \pi(r)$ .

On peut définir une structure de GQC sur  $C^*(\Gamma)$ .  $\Gamma \rightarrow C^*(\Gamma) \otimes C^*(\Gamma)$   
 $r \mapsto u_r \otimes u_r$   
 s'étend en  $\Delta_u: C^*(\Gamma) \rightarrow C^*(\Gamma)^{\otimes 2}$  comultiplication sur  $C^*(\Gamma)$ .

La représentation triviale est  $r \mapsto 1$  qui s'étend en un caractère  $\varepsilon: C^*(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$  qui est la counité de  $C^*(\Gamma)$ ; elle est bornée sur  $C^*(\Gamma)$ .

Considérons  $\mathcal{D}: C^*(\Gamma) \rightarrow C^*(\Gamma)$ . Rappelons que  $\Gamma$  moyennable  $\Leftrightarrow \mathcal{D}$   $*$ -homomorphisme.

Rappelons que  $C_r^*(\Gamma)$  admet une trace  $\tau(u) = \langle \pi \delta_e, \delta_e \rangle$ , l'état de Haar de  $(C_r^*(\Gamma), \Delta_r)$ .  
 Alors  $h = \tau \circ \mathcal{D}$  est l'état de Haar de  $C^*(\Gamma)$ . Comme  $\tau$  est fidèle sur  $C_r^*(\Gamma)$ ,  
 $\mathcal{D}$   $*$ -isomorphisme  $\Rightarrow h$  état de Haar sur  $C^*(\Gamma)$  fidèle.

But: pour  $(A, \Delta)$  a QC, montrer que  $(A, \Delta)$  moyennable

(2) 11/10/13

$\Leftrightarrow$  l'application canonique  $A_u \rightarrow A_r$   
est un  $*$ -isomorphisme

$\Leftrightarrow$  l'état de Haar  $h_u$  est fidèle sur  $(A_u, \Delta_u)$ .

③ a QC universel et moyennabilité

Soit  $(A, \Delta)$  un a QC. Pour  $a \in \mathcal{A}$ , posons  $\|a\|_u = \sup_{\pi \text{ rep. unitale de } \mathcal{A}} \|\pi(a)\|$

Lemme:  $\|\cdot\|_u$  est une  $C^*$ -norme sur  $\mathcal{A}$ .

Dem: Il suffit de montrer que le sup est fini. Comme il existe la représentation fidèle  $\delta_{\mathcal{A}}$ , on en déduit que c'est une  $C^*$ -norme.

Comme  $\mathcal{A}$  est engendré linéairement par les coefficients de coreprésentations unitaires (irréductibles), il suffit de montrer que pour tout  $u \in M_N(\mathbb{C}) \otimes A$  corep. unitaire on a

$\forall i, j \quad \|U_{ij}\|_u < \infty$ . Or  $\sum_{h=1}^N (U_{ih})^* (U_{ih}) = 1$  et  $1 - U_{ij}^* U_{ij} = \sum_{k \neq j} U_{ik}^* U_{ik}$   
et si  $\pi$  est une  $*$ -rep. unitale de  $\mathcal{A}$ ,  $\pi(U_{ij}^* U_{ij}) \leq 1$  et  $\|\pi(U_{ij}^*)\| \leq 1$ .

Notons  $A_u$  la complétion  $C^*$ -algébrique de  $\mathcal{A}$  munie de  $\|\cdot\|_u$ .

$A_u$  a la prop. universelle suivante: si  $\tau: \mathcal{A} \rightarrow B$   $C^*$ -algèbre unitale est une  $*$ -représentation, alors il existe un unique prolongement  $\tilde{\tau}: A_u \rightarrow B$ .

On aura  $\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \subseteq A_u \otimes_{\min} A_u$ , et

$\Delta_u: A_u \rightarrow A_u \otimes_{\min} A_u$   $*$ -représentation, sera une comalgèbre

par densité et continuité:  $(A_u, \Delta_u)$  est un a QC.

Par les propriétés universelles: ①  $\psi: A_u \rightarrow A$   $*$ -homomorphisme qui étend  $\mathcal{A}$  à  $A$ , et

pour tout  $a \in A_u$   $\psi \otimes \psi \Delta_u(a) = \Delta(\psi(a))$ . On dit que  $\psi$  est un morphisme de groupe quantique compact. Alors  $\mathcal{A}$  est la  $*$ -algèbre de Hopf sous-jacente à  $A_u$  et  $\Delta_u|_{\mathcal{A}} = \Delta$ . ②  $\varepsilon: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$   $*$ -homomorphisme s'étend en  $\varepsilon_u: A_u \rightarrow \mathbb{C}$

caractère non nul. On peut vérifier que  $\varepsilon_u$  est la co-unité de  $A_u$  et que  $\varepsilon_u$  est hermite sur  $A_u$ : pour  $a \in \mathcal{A}$ ,  $(\text{id}_{A_u} \otimes \varepsilon_u) \circ \Delta_u(a) = (\text{id}_A \otimes \varepsilon_u) \left( \frac{\psi \otimes \psi}{\Delta(\psi(a))} \Delta(a) \right)$  ... c'est une tautologie.

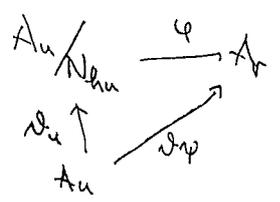
car  $\Delta_u|_{\mathcal{A}} = \Delta$  et  $\varepsilon_u|_{\mathcal{A}} = \varepsilon$ .

$h_u$  état de Haar sur  $A_u$ :  $h_u = h_r \psi$  et pour  $a \in \mathcal{A}$ , on suit la tautologie et on passe par densité et continuité.

Considérons  $\vartheta: A \rightarrow A_r$  et  $\vartheta\varphi: A_u \rightarrow A_r$ . On va montrer que le GQC réduit de  $(A_u, \Delta_u)$  est isomorphe à  $(A_r, \Delta_r)$ .

On a  $h_u = h_\varphi = h_r \circ \varphi$ .  $h_r$  est fidèle sur  $A_r$  et  $N_{h_u} = \ker(\vartheta\varphi)$ ,  $A_u/N_{h_u} \cong \vartheta\varphi(A_u) = A_r$ .

Pour montrer que  $(A_u/N_{h_u}, \Delta_{u,r})$  est isomorphe à  $(A_r, \Delta_r)$ , il faut vérifier que les multiplications sont entrelacées.

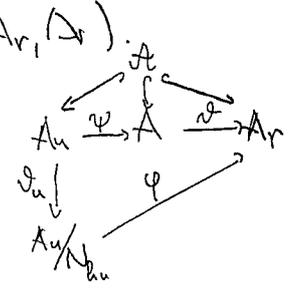


$$\begin{aligned}
 \text{Si } a \in A_u, \quad (\varphi \circ \vartheta) \cdot \Delta_{u,r}(\vartheta_u(a)) &= (\varphi \circ \vartheta) \vartheta_u \circ \vartheta_u \Delta_u(a) \\
 &= (\vartheta \circ \vartheta) \underbrace{(\varphi \circ \vartheta)}_{\varphi(\vartheta(a))} \Delta_u(a) \\
 &= \Delta_r(\vartheta(\varphi(a))) \\
 &= \Delta_r(\varphi(\vartheta_u(a)))
 \end{aligned}$$

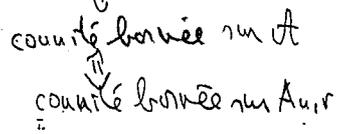
D'où l'isomorphisme entre le GQC réduit de  $(A_u, \Delta_u)$  et  $(A_r, \Delta_r)$ .

On a:  $\varepsilon_{u,r}(a) = \varepsilon_r(\varphi(a))$  pour  $a \in A$ .  
 $\kappa_{u,r}(a) = \kappa_r(\varphi(a))$

Diagramme: commutatif



Fait:  $(A, \Delta)$  comoyennable  $\Leftrightarrow (A_u, \Delta_u)$  comoyennable.



Remarque: la comoyennabilité passe par isomorphisme de GQC.

Q: et par épimorphisme: pb: quelle notion de sous-groupe utilise-t-on?

Théorème: Soit  $(A, \Delta)$  un GQC. Les assertions suivantes sont équivalentes:

- (1)  $(A, \Delta)$  comoyennable
- (2)  $A_u \rightarrow A_r$ , l'application canonique, et un  $\ast$ -isomorphisme
- (3) Les applications canoniques  $A_u \rightarrow A$  et  $A \rightarrow A_r$  sont des  $\ast$ -isomorphismes.
- (4) L'état de Haas  $h_u$  sur  $(A_u, \Delta_u)$  est fidèle

Dém: on a déjà  $\begin{cases} (1) \Leftrightarrow (4) \\ (2) \Leftrightarrow (3) \end{cases}$  et  $(4) \rightarrow (2)$  car  $N_{h_u} = \ker(\vartheta\varphi)$

Remarque:  $(A, \Delta)$  comoyennable  $\Leftrightarrow$   $h$  fidèle sur  $A$  et  $\varepsilon$  bornée sur  $A$  ] prouve la remarque dernière.  
 $\Leftrightarrow h_u$  fidèle sur  $(A_u, \Delta_u)$   
 $\Leftrightarrow \varepsilon_r$  bornée sur  $\vartheta(A)$

④  $C^*$ -normes régulières sur une  $C^*$ -algèbre de Hopf.

④  
17/12/23

Def: Soit  $\mathcal{A}$  une  $*$ -algèbre de Hopf. Un groupe quantique compact  $(A_c, \Delta_c)$  et une completion de  $\mathcal{A}$  lorsque  $\overline{\mathcal{A}} = A_c$  et  $\Delta|_{\mathcal{A}} = \Delta_c$ . Une  $C^*$ -norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$  sur  $\mathcal{A}$  est régulière s'il existe une completion  $(A_c, \Delta_c)$  de  $\mathcal{A}$  telle que  $\|\cdot\|_{A_c} = \|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ .

Exemple:  $(A, \Delta)$  GQC. Pour  $a \in \mathcal{A}$ ,  $\|a\|_u$  (norme dans  $A_u$ ) est une  $C^*$ -norme régulière sur  $\mathcal{A}$  et  $\|\cdot\|_c$  est une  $C^*$ -norme régulière sur  $\mathcal{A}$ , il existe un unique  $*$ -homomorphisme  $A_u \rightarrow A_c$  qui étend l'inclusion  $\mathcal{A} \subseteq A_c$ . On a  $\|a\|_c \leq \|a\|_u$  pour  $a \in \mathcal{A}$  et  $\|\cdot\|_u$  est la plus grande  $C^*$ -norme régulière sur  $\mathcal{A}$ .

On pose pour  $a \in \mathcal{A}$   $\|a\|_r = \| \underbrace{\mathcal{D}(a)}_{\text{norme dans } \mathcal{A}} \|$  : c'est une  $C^*$ -norme car  $\mathcal{D}$  est injective sur  $\mathcal{A}$ .

Théorème: Soit  $(A, \Delta)$ . La plus petite  $C^*$ -norme régulière sur  $\mathcal{A}$  est  $\|\cdot\|_r$ .

Démonstration:  $(A_c, \Delta_c)$  completion. Par unicité de l'état de Haar, on a pour tout  $a \in \mathcal{A}$  que  $h_c(a) = h(a)$ . [unicité de l'état de Haar sur les  $*$ -alg de Hopf]

Alors  $|h(a)| \leq \|a\|_c$ . Il faut approcher par des  $a \in \mathcal{A}$ :

$$\|a^* a\|_r = \| \mathcal{D}(a^* a) \| = \lim_n h_r \left( (\mathcal{D}(a)^* \mathcal{D}(a))^n \right)^{1/n} \text{ car } h_r \text{ est fidèle sur } A_r.$$

$$\text{Or } \|a^* a\|_r = \lim_n h((a^* a)^n)^{1/n} \text{ et donc } \|a^* a\|_r \leq \lim_n \| (a^* a)^n \|_c^{1/n} \leq \|a^* a\|_c.$$

(Il manque ici un exemple:  $SU_q(2)$ ).