Alexandre 12/2/2013.

Comoyennabilité (suite)

<u>Déf.</u> : (A,Δ) g.q.c. est comoyennable si la counité de (A_r,Δ_r), le groupe quantique compact réduit, est bornée.

<u>Caractérisation</u> : (A,Δ) est comoyennable <u>ssi</u> l'état de Haar h de (A,Δ) est fidèle et la counité est bornée.

<u>Illustration</u> : Γ groupe discret, $\lambda : G \longrightarrow B(\ell^2(G))$ la régulière gauche.

$C^*_r(\Gamma)$ est la C^*algèbre engendrée par les $\lambda_\gamma, \gamma \in \Gamma$. $\Delta : C^*_r(\Gamma) \to C^*_r(\Gamma)^{\otimes^2_{min}}$, $\lambda_\gamma \mapsto \lambda_\gamma\otimes\lambda_\gamma$, la comultiplication, est bien définie car $\lambda\otimes\lambda$ est unitairement équivalent à $id\otimes\lambda$: c'est le principe d'absorption de Fell. On vérifie alors que $(C^*_r(\Gamma),\Delta)$ est un GQC. [voir la présentation d'Uwe]

La $*$-algèbre de Hopf est $\text{span}\{\lambda_\gamma : \gamma\in\Gamma\} = \mathbb{C}(\Gamma)$, de counité $\varepsilon(\lambda_\gamma)=1$ et d'antipode $K(\lambda_\gamma)=\lambda_{\gamma^{-1}}$.

La C^*-algèbre universelle $C^*(\Gamma)$ est $\overline{\text{span}}\{u_\gamma : \gamma\in\Gamma\}$, où u est la représentation universelle [la vraie définition, la voici : $\pi_u = \oplus\{\pi : \pi \text{ rep. unitaire de } \Gamma \text{ sur } \ell^2(\Gamma)\}$ est une représentation unitaire de Γ sur $\underset{\pi}{\oplus_2} H_\pi = H_u$ et $C^*(\Gamma) = \overline{\text{span}}\{\pi_u(\gamma) : \gamma\in\Gamma\}$ dans $B(H_u)$]. Voici la propriété universelle : Si π est une rep. unitaire de Γ sur K, il existe un unique $*$-homomorphisme $\varphi : C^*(\Gamma) \longrightarrow B(K)$ tel que $\varphi(u_\gamma) = \pi(\gamma)$.

On peut définir une structure de GQC sur $C^*(\Gamma)$. $\Gamma \longrightarrow C^*(\Gamma)\otimes C^*(\Gamma)$, $\gamma \longmapsto u_\gamma\otimes u_\gamma$ s'étend en $\Delta_u : C^*(\Gamma) \longrightarrow C^*(\Gamma)^{\otimes^2}$ comultiplication sur $C^*(\Gamma)$.

La <u>représentation triviale</u> est $\gamma \longmapsto 1$ qui s'étend en un caractère $\varepsilon : C^*(\Gamma) \to \mathbb{C}$ qui est la counité de $C^*(\Gamma)$; elle est bornée sur $C^*(\Gamma)$.

Considérons $\vartheta : C^*(\Gamma) \longrightarrow C^*_r(\Gamma)$. Rappelons que Γ moyennable $\Leftrightarrow$ ϑ $*$-isomorphisme.

Rappelons que $C^*_r(\Gamma)$ admet une trace $tr(x) = \langle x\delta_e, \delta_e\rangle$, état de Haar de $(C^*_r(\Gamma),\Delta_r)$. Alors $h = tr\circ\vartheta$ est l'état de Haar de $C^*(\Gamma)$. Comme tr est fidèle sur $C^*_r(\Gamma)$, ϑ $*$-isomorphisme $\Rightarrow$ h état de Haar sur $C^*(\Gamma)$ fidèle.

12/1/2013

But : pour (A,Δ) GQC, montrer que (A,Δ) comoyennable

$\iff$ l'application canonique $A_u \longrightarrow A_r$ est un $*$-isomorphisme

$\iff$ l'état de Haar h_u est fidèle sur (A_u,Δ_u).

(3) GQC universel et comoyennabilité

Soit (A,Δ) un GQC. Pour $a\in\mathcal{A}$ ("algèbre du groupe q.c", coefficients des rep.), posons $\|a\|_u = \sup_{\pi \text{ rep. unitale de } \mathcal{A}} \|\pi(a)\|$

Lemme : $\| \ \|_u$ est une C^*-norme sur $\mathcal{A}$.

Dém : Il suffit de montrer que le sup est fini. Comme il existe des représentations fidèles de $\mathcal{A}$, on en déduira que c'est une C^*-norme.

Comme $\mathcal{A}$ est engendré linéairement par les coefficients de corepresentations unitaires (irréductibles), il suffit de montrer que pour tout $u\in M_N(\mathbb{C})\otimes A$ corep. unitaire on a $\forall i,j \ \|U_{ij}\|_u < \infty$. Or $\sum_{k=1}^{N} (U_{ik})^*(U_{ik}) = 1$ et $1 - U_{ij}^* U_{ij} = \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{N} U_{ik}^* U_{ik}$

et si π est une $*$-rep. unitale de $\mathcal{A}$, $\pi(U_{ij}^* U_{ij}) \leq 1$ et $\|\pi(U_{ij})\| \leq 1$.

Notons A_u la complétion C^*-algébrique de $\mathcal{A}$ munie de $\| \ \|_u$.

A_u a la prop. universelle suivante : si $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow B$ C^*-algèbre unitale est une $*$-représentation, alors il existe un unique prolongement $\tilde{\pi} : A_u \longrightarrow B$.

On aura $\Delta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \subseteq A_u \otimes_{min} A_u$, et

$\Delta_u : A_u \longrightarrow A_u \otimes_{min} A_u$ $*$-représentation, sera une comultiplication par densité et continuité : (A_u,Δ_u) est un GQC.

Par les propriétés universelles (1) $\varphi : A_u \longrightarrow A$ $*$-homomorphisme qui étend $\mathcal{A}$ à A, et pour tout $a\in A_u$ $\varphi\otimes\varphi\,\Delta_u(a) = \Delta(\varphi(a))$. On dit que φ est un morphisme de groupe quantique compact. Alors $\mathcal{A}$ est la $*$-algèbre de Hopf sous-jacente à A_u et $\Delta_u|\mathcal{A} = \Delta$. (2) $\varepsilon : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ $*$-homomorphisme s'étend en $\varepsilon_u : A_u \longrightarrow \mathbb{C}$ caractère normal. On peut vérifier que ε_u est la counité de A_u et que ε_u est bornée sur A_u : pour $a\in\mathcal{A}$, $(id_{A_u}\otimes\varepsilon_u)\circ\Delta_u(a) = (id_A\otimes\varepsilon_u)\underbrace{(\varphi\otimes\varphi)\Delta(a)}_{\Delta(\varphi(a))}$ ... c'est une tautologie car $\Delta_u|_{\mathcal{A}} = \Delta$ et $\varepsilon_u|_{\mathcal{A}} = \varepsilon$.

h_u état de Haar sur A_u : $h_u = h\varphi$ et pour $a\in\mathcal{A}$, on suit la tautologie et on procède par densité et continuité.

Considérons $\vartheta : A \longrightarrow A_r$ et $\vartheta_\varphi : A_u \longrightarrow A_r$. On va montrer que le GQC réduit de (A_u, Δ_u) est isomorphe à (A_r, Δ_r).

On a $h_u = h\varphi = h_r \vartheta \varphi$. h_r est fidèle sur A_r donc $N_{h_u} = \ker(\vartheta_\varphi)$, $A_u / N_{h_u} \approx \vartheta_\varphi(A_u) = A_r$.

Pour montrer que $(A_u / N_{h_u}, \Delta_{u,r})$ est isomorphe à (A_r, Δ_r), il faut vérifier que les comultiplications sont entrelacées.

$$\begin{tikzcd} A_u/N_{h_u} \arrow[r, "\varphi"] & A_r \\ A_u \arrow[u, "\vartheta_u"] \arrow[ur, "\vartheta_\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Si $a \in A_u$,
$$\begin{aligned}(\varphi\otimes\varphi)\Delta_{u,r}(\vartheta_u(a)) &= (\varphi\otimes\varphi)\,\vartheta_u\otimes\vartheta_u\,\Delta_u(a) \\ &= (\vartheta\otimes\vartheta)\underbrace{(\psi\otimes\psi)\,\Delta_u(a)}_{\Delta(\psi(a))} \\ &= \Delta_r(\vartheta(\psi(a))) \\ &= \Delta_r(\varphi(\vartheta_u(a)))\end{aligned}$$

D'où l'isomorphisme entre le GQC réduit de (A_u, Δ_u) et (A_r, Δ_r).

On a $\varepsilon_{u,r}(a) = \varepsilon_r(\varphi(a))$ pour $a \in \mathcal{A}$.
$K_{u,r}(a) = K_u(\psi(a))$

Diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A} \arrow[dl] \arrow[d, hook] \arrow[dr] & \\ A_u \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\vartheta_u"] & A \arrow[r, "\vartheta"] & A_r \\ A_u/N_{h_u} \arrow[urr, "\varphi"] & & \end{tikzcd}$$

Fait: (A, Δ) comoyennable $\Leftrightarrow$ (A_u, Δ) comoyennable.
$\Updownarrow$
counité bornée sur $\mathcal{A}$
$\Updownarrow$
counité bornée sur $A_{u,r}$

Remarque: la comoyennabilité passe par isomorphisme de GQC.

Q: et par épimorphisme : pb: quelle notion de sous-groupe utilise-t-on ?

Théorème : Soit (A, Δ) un GQC. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(1) (A, Δ) comoyennable
(2) $A_u \to A_r$, l'application canonique, est un $*$-isomorphisme
(3) Les applications canoniques $A_u \to A$ et $A \to A_r$ sont des $*$-isomorphismes.
(4) L'état de Haar h_u sur (A_u, Δ_u) est fidèle

Dém : on a déjà $\begin{cases}(1) \Leftarrow (4) \\ (2) \Leftrightarrow (3)\end{cases}$ et $(4) \Rightarrow (2)$ car $N_{h_u} = \ker(\vartheta_\varphi)$

Remarque: (A, Δ) comoyennable $\Leftrightarrow$ h fidèle sur A et ε bornée sur $\mathcal{A}$] prouvé la semaine dernière.
$\Leftrightarrow$ h_u fidèle sur (A_u, Δ_u)
$\Leftrightarrow$ ε_r bornée sur $\vartheta(\mathcal{A})$

(4) C^*-normes régulières sur une C^*-algèbre de Hopf.

<u>Déf</u> : Soit $\mathcal{A}$ une $*$-algèbre de Hopf. Un groupe quantique compact (A_c, Δ_c) est une <u>complétion</u> de $\mathcal{A}$ lorsque $\overline{\mathcal{A}} = A_c$ et $\Delta_c|_{\mathcal{A}} = \Delta$. Une C^*-norme $\|\ \|$ sur $\mathcal{A}$ est <u>régulière</u> s'il existe une complétion (A_c, Δ_c) de $\mathcal{A}$ telle que $\|\cdot\|_c|_{\mathcal{A}} = \|\cdot\|$.

<u>Exemple</u> : (A, Δ) GQC. Pour $a \in \mathcal{A}$, $\|a\|_u$ (norme dans A_u) est une C^*-norme régulière sur $\mathcal{A}$ et si $\|\cdot\|_c$ est une C^*-norme régulière sur $\mathcal{A}$, il existe un unique φ_c $*$-homomorphisme $A_u \longrightarrow A_c$ qui étend de l'inclusion $\mathcal{A} \subseteq A_c$.
On a $\|a\|_c \leq \|a\|_u$ pour $a \in \mathcal{A}$ et $\|\cdot\|_u$ est la plus grande C^*-norme régulière sur $\mathcal{A}$.
On posera pour $a \in \mathcal{A}$ $\|a\|_r = \|\vartheta(a)\|$: c'est une C^*-norme car ϑ est injective sur $\mathcal{A}$.
($\|\vartheta(a)\|$: norme dans A)

<u>Théorème</u> : Soit (A, Δ). La plus petite C^*-norme régulière sur $\mathcal{A}$ est $\|\cdot\|_r$.

Démonstration : (A_c, Δ_c) complétion. Par unicité de l'état de Haar, on a pour tout $a \in \mathcal{A}$ que $h_c(a) = h(a)$. [unicité de l'état de Haar sur les $*$-alg de Hopf]
Alors $|h(a)| \leq \|a\|_c$. Il faut approcher par les $a \in \mathcal{A}$:
$\|a^*a\|_r = \|\vartheta(a^*a)\| = \lim_n h_r\left(\left(\vartheta(a)^*\vartheta(a)\right)^n\right)^{1/n}$ car h_r est fidèle sur A_r.
Or $\|a^*a\|_r = \lim_n h\left((a^*a)^n\right)^{1/n}$ et donc $\|a^*a\|_r \leq \lim \|(a^*a)^n\|_c^{1/n} \leq \|a^*a\|_c$.

Il manque ici un exemple : $SU_q(2)$.