$SU_q(2)$ est comoyennable

Alexandra
5/3/2013

① GQMC

<u>Déf</u>: Soit (A,Δ) un g.q.c. C'est un <u>pseudogroupe matriciel compact</u> (ou groupe quantique (GQMC)) s'il existe $U \in M_N \otimes A$ corepresentation <u>fondamentale</u> [unitaire] de (A,Δ), c'est-à-dire que $*\text{-alg}\langle U_{ij}\rangle$ est la $*$-algèbre de Hopf $\mathcal{A}$ de (A,Δ).

<u>Th</u>: (A,Δ) un GQMC et $U \in M_N \otimes A$ corep. [unitaire] fondamentale. On note $\chi_U = \sum U_{ii}$.

LASSE :
① la counité de (A,Δ) est bornée
② $N \in \operatorname{spec} \operatorname{Re} \chi_U$
③ $\exists \tau \in S(A) \quad \tau(\operatorname{Re}\chi_U) = N$
④ $\exists \tau \in S(A) \quad \tau(U_{ii}) = 1$
⑤ $\forall (\lambda_0, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^{N+1} \quad |\sum_{i=0}^{N} \lambda_i| \leq \|\lambda_0 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i U_{ii}\|$

<u>Corollaire</u> : Sous les mêmes hypothèses et avec $\vartheta : A \longrightarrow A_r$, lasse

① (A,Δ) est comoyennable
② $N \in \operatorname{spec} \vartheta \operatorname{Re} \chi_U$
③ $\exists \tau \in S(A_r) \quad \tau(\vartheta \operatorname{Re}(\chi_U)) = N$
④ $\exists \tau \in S(A_r) \quad \tau(\vartheta(U_{ii})) = 1$
⑤ $\forall (\lambda_0, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^{N+1} \quad |\sum_{i=0}^{N} \lambda_i| \leq \|\lambda_0 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \vartheta(U_{ii})\|$

<u>Dem</u> : (A,Δ) comoyennable $\Leftrightarrow$ la counité de (A_r,Δ_r) est bornée

(A_r, Δ_r) est aussi un gqmc car si U corep fondamentale de (A,Δ), alors $(id \otimes \vartheta)U$ est une corep fond. de (A_r, Δ_r).

$\rightarrow$ $\vartheta \otimes \vartheta$ s'entrelace bien avec Δ.

<u>Dem du théorème</u> : (1⇒5) $\varepsilon(U_{ij}) = \delta_{ij}$ définit un $*$-homomorphisme et $|\varepsilon(\lambda_0 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i U_{ii})| \leq \|\lambda_0 + \sum_{i=1}^{N} \dots\|$

(5⇒4) On peut définir la forme linéaire τ sur $\langle 1, U_{ii}\rangle$ par $\tau(\lambda_0 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i U_{ii}) = \lambda_0 + \dots + \lambda_N$ et on la prolonge par Hahn-Banach. On a $\|\tau\| = 1 = |\tau(1)|$ et donc ce prolongement est un état sur A.

(4⇒3) ✓ (2⇔3). On montre que $\operatorname{Re}\chi_U - N \leq 0$; si $x \geq 0$ dans A C^*-algèbre, on a

$0 \in \mathrm{spec}\, x \iff \exists \tau \in S(A)\ \tau(x)=0$. Posons $X_{ij} = U_{ij} - \delta_{ij}$ et $X = \sum\sum X_{ij}X_{ij}^* + X_{ij}^*X_{ij}$. On a $\sum\sum X_{ij}X_{ij}^* = \sum' U_{ij}U_{ij}^* - \sum U_{ii} - \sum U_{ii}^* + N$
$= 2N - 2\,\mathrm{Re}\,\chi_U = \sum\sum X_{ij}^* X_{ij}$.

Donc $0 \leq X = 4(N - \mathrm{Re}\,\chi_U)$. [On pouvait aussi dire que χ_U est hermitien de spectre $\subset [-N,N]$ ...]

(3 ⇒ 1) Soit $\tau \in S(A)$ tel que $\tau(\mathrm{Re}\,\chi_U) = N$. Si $\tau(X)=0$, on a $\tau(X_{ij}X_{ij}^*) = \tau(X_{ij}^*X_{ij}) = 0$.

Soit (π, H, ξ) la GNS associée à τ: $\forall a \in A\ \tau(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi\rangle$: $\pi(X_{ij})\xi = \pi(X_{ij}^*)\xi = 0$

et $\pi(U_{ij})\xi = \pi(U_{ij}^*\xi) = \delta_{ij}\xi$.

U est fondamentale : donc $\forall a \in \mathcal{A}\ \pi(a)\xi \in \mathbb{C}\xi$ et donc aussi pour $a \in A$. D'où, par cyclicité de ξ, $H = \mathbb{C}\xi$ et $\pi(a) = \tau(a)$ pour $a \in A$: τ est un caractère sur A, et $\tau(U_{ij}) = \pi(U_{ij}) = \delta_{ij}$: $\tau = \varepsilon$ et ε est donc borné.

(2) $SU_q(2)$, $q \in]-1,0[\cup]0,1[$

On introduit la $*$-algèbre libre engendrée par deux éléments α et γ, quotientée par les relations
$$(*)\quad \begin{cases} \alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = 1 \\ \alpha\alpha^* + q^2\gamma\gamma^* = 1 \\ \gamma\gamma^* = \gamma^*\gamma \\ \alpha\gamma = q\gamma\alpha \\ \alpha\gamma^* = q\gamma^*\alpha \end{cases}$$
et on note $\mathcal{A}_q$ cette $*$-algèbre.

$\alpha^{(k)} = \begin{cases} \alpha^k & \text{si } k \geq 0 \\ (\alpha^*)^{-k} & \text{si } k \leq 0 \end{cases}$

Proposition: (1) $\left(\alpha^{(k)}\gamma^m\gamma^{*n}\right)_{(k,m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^2}$ est une base de $\mathcal{A}_q$
(2) $\exists \pi : \mathcal{A}_q \longrightarrow B(H)$ $*$-rep unitale fidèle.

Corollaire: Posons pour $x \in \mathcal{A}_q$ $\|x\| = \sup\{\|\pi(x)\| : \pi$ $*$-rep unitale de $\mathcal{A}_q$ sur un Hilbert séparable$\}$.
Ceci définit une C^*-norme sur $\mathcal{A}_q$ et on note A_q la complétion.
On a clairement pour $x = \alpha$ ou γ que $\|x\| \leq 1$, $\|\gamma\| \leq 1$ grâce à $(*)$. D'où que tout $x \in \mathcal{A}_q$ est borné et qu'on a une C^*-seminorme sur $\mathcal{A}_q$. D'après (2) c'est une C^*-norme.

Preuve: (1) $\alpha, \gamma, \alpha^*, \gamma^*$ sont de la forme $\alpha^{(k)}\gamma^m\gamma^{*n}$; le span de ces éléments est stable par produit (exercice)

(2) H espace de Hilbert sep : considérons $(e_{n,k})_{n\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{Z}}$: Posons $\alpha' \in B(H)$ par $\alpha' e_{0k} = 0$
$\alpha' e_{nk} = \sqrt{1-q^{2n}}\, e_{n-1,k}$

et $\gamma' \in B(H)$ par $\gamma' e_{n,k} = q^n e_{n,k+1}$

Alors α', γ' satisfont aux relations $*$ dans $B(H)$: il existe une unique $*$-rep $\pi : \mathcal{A}_q \to B(H)$

telle que $\begin{cases}\pi(\alpha)=\alpha' \\ \pi(\gamma)=\gamma'\end{cases}$: on va montrer que $\left(\pi(\alpha^{(k)}\gamma^m\gamma^{*n})\right)$ est libre dans $B(H)$.

Soit $\pi(x) = \sum\sum\sum x_{kmn}\,\pi(\alpha^{(k)}\gamma^m\gamma^{*n})$, (x_{kmn}) une famille à support fini non vide

$$\pi(\alpha^{(k)}\gamma^m\gamma^{*n})\,e_{r,0} = \pi(\alpha^{(k)})\,q^{r(n+m)}\,e_{r,m-n}$$
$$= \begin{cases} q^{r(n+m)}\sqrt{1-q^{2r}}\cdots\sqrt{1-q^{2(r-k+1)}}\;e_{r-k,m-n} & \text{si } k\geq 0,\ r\geq k \\ q^{r(n+m)}\sqrt{1-q^{2(r+1)}}\cdots\sqrt{1-q^{2(r-k)}}\;e_{r-k,m-n} & \text{si } k<0,\ r\geq k. \end{cases}$$

Notons (k_0,m_0,n_0) l'indice de $x_{k,m,n}$ non nul tel que m_0+n_0 soit minimal.

Alors $\dfrac{\langle \pi(x)e_{r,0},\, e_{r-k_0,m_0-n_0}\rangle}{q^{r(m_0+n_0)}} \longrightarrow x_{k_0,m_0,n_0}$, etc.

D'où $\pi(x)\neq 0$. ■

On a défini A_q. Il reste à définir la structure de GQMC. On veut que l'unitaire $\begin{pmatrix}\alpha & -q\gamma^* \\ \gamma & \alpha^*\end{pmatrix}$ soit une corep de A_q, i.e., on a nécessairement

$$\Delta(\alpha) = \alpha\otimes\alpha - q\gamma^*\otimes\gamma = \alpha' \in A_q\otimes_{\min}A_q$$
$$\Delta(\gamma) = \gamma\otimes\alpha + \alpha^*\otimes\gamma = \gamma' \in A_q\otimes_{\min}A_q$$

. Alors $\gamma'\alpha'$ vérifient ⊛ !

Par propriété universelle, il existe un unique $*$-homomorphisme $\Delta : A_q \to A_q\otimes_{\min}A_q$ tel que $\begin{cases}\Delta(\alpha)=\alpha' \\ \Delta(\gamma)=\gamma'\end{cases}$ Il reste à vérifier que Δ est un coproduit. ✓.

Problème : il faut encore vérifier les deux règles de simplification : c'est beaucoup moins évident : $\mathrm{span}\{(1\otimes\mathcal{A})\Delta(\mathcal{A})\} = \mathrm{span}\{(\mathcal{A}\otimes 1)\Delta(\mathcal{A})\} = \mathcal{A}_q\otimes_{alg}\mathcal{A}_q$.

On peut aussi suivre la piste du survey de Maes et van Daele : coreps de A_q, ...

Indication de Vaes. Ds les algèbres de Hopf, $T : \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \to \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$

$$a\otimes b \longmapsto (a\otimes 1)\Delta b$$

est inversible d'inverse $T^{-1} = (m\otimes id)(id\otimes s\otimes id)(id\otimes\Delta)$

ex : construire $1\otimes a$: appliquer Δ, s, m : $s(a_{(1)})\otimes a_{(2)}$;

où $\Delta a = a_{(1)}\otimes a_{(2)}$ [somme sous-entendue]

$$s(a_{(1)})\otimes 1\,\Delta(a_{(2)}) = \underbrace{s(a_{(1)})\,a_{(2)}}_{\varepsilon(a_{(1)})1}\otimes a_{(3)} = 1\otimes a.$$

On a
$$s(\alpha) = \alpha^*$$
$$s(\alpha^*) = \alpha$$
$$s(\gamma) = -q\gamma$$

Si u est une corep. unitaire de A_q, alors $\varepsilon(u_{ij}) = \delta_{ij}$.

$\left.\begin{array}{l}\varepsilon(\alpha)=1\\ \varepsilon(\gamma)=0\end{array}\right\}$ vérifient dans $\mathbb{C}$ les relations (*) : par la propriété universelle, on obtient un unique $\varepsilon : A_q \longrightarrow \mathbb{C}$, ε caractère, tel que $\varepsilon(\alpha)=1$ et $\varepsilon(\gamma)=0$.

On vérifie que ε est la counité de A_q

<u>Remarque</u> : ε est bornée

<u>Rappel</u> : (A,Δ) comoyennable $\Leftrightarrow$ ε bornée et h fidèle sur A.

<u>Etat de Haar sur A_q</u> : si $a \in A_q$, on a $h(a) = (1-q^2)\sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n}\langle \pi(a)e_{n,0}, e_{n,0}\rangle$

Notons $N_h = \{a \in A_q : h(a^*a)=0\}$: $a \in N_h$ si $\pi(a)e_{n,0}=0$ pour tout n.
Montrons que $\pi(a)=0$.

Or, si $\forall n$ $\pi(a)e_{n,0}=0$, $a\in N_h$, $a\gamma^m \in N_h$, $a\gamma^{m*}\in N_h$

$\pi(a\gamma^m)e_{n,0} = 0 = \pi(a\gamma^{*m})e_{n,0}$ et $\pi(a)e_{n,m} = \pi(a)e_{n,-m} = 0$. D'où $\pi(a)=0$.

On a $(A_q)_r = A_q/N_h \simeq \pi(A_q)$. Il existe τ état sur A_r tel que $\tau(\vartheta \mathrm{Re}\,\chi_U)=2$

Posons $H_k = \overline{\mathrm{span}}\{e_{n,k} : n\geq 0\}$: $\pi(\alpha)|_{H_k} = S_k^* D_k$ où D_k est diagonal : $e_{n,k} \longmapsto \underbrace{\sqrt{1-q^{2n}}}_{c_n} e_{n,k}$

et S_k est le shift à droite sur H_k. On a $\rho_k(D_k) = \rho_k(\mathrm{id}_{H_k})$, où $\rho_k : B(H_k) \longrightarrow \underbrace{B(H_k)/K(H_k)}_{= \mathcal{C}(H_k)}$.

On a $\rho_k(\pi(\alpha)|_{H_k}) = \rho_k(S_k^*)$. Alors $\rho_k(S_k^*)$ unitaire dans $\mathcal{C}(H_k)$ et

spec $\rho_k(S_k^*) = \mathbb{T}$: $1 \in$ spec $\rho_k(S_k^*)$ et $\exists\, \tau_k \in \mathcal{C}(H_k)$ $\tau(\rho_k(S_k^*))=1$.

et $\exists\, \hat{\tau}_k = \tau\circ\rho_k$ état sur $B(H_k)$ $\hat{\tau}(\pi(\alpha)|_{H_k})=1$,

et $\tilde{\tau} : B(H) \longrightarrow \mathbb{C}$
$\qquad T \longmapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} t_k\, \hat{\tau}_k(P_{H_k} T|_{H_k})$ où $\sum_{k\in\mathbb{Z}} t_k = 1$.

et $\tilde{\tau}\circ\pi(\alpha)=1$ et donc $\tilde{\tau}(\vartheta\,\mathrm{Re}(\chi_U))=2$. [On pouvait prendre $k=0$ et ignorer les autres !]