

fin de " $SU_q(2)$ est coamenable"

Thm: "

Dem: h état de Haar sur $SU_q(2)$: $\exists a \in A_q$

$$h(a) = (1 - q^2) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} \langle \pi(a) p_{n,0}, p_{n,0} \rangle \text{ où } \pi: A_q \rightarrow B(H)$$

morphisme involutif sur H e. Hilbert séparable de base orthonormée

$$(p_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \text{ avec } \begin{cases} \pi(a) p_{n,k} = \sqrt{1 - q^{2n}} p_{n+1,k} \\ \pi(r) p_{n,k} = q^{2n} p_{n,k-1} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} N_\pi = \{a \in A_q : h(a^*a) = 0\} = \ker \pi \text{ idéal bilatère}$$

$$a \in N_\pi \iff \forall n \in \mathbb{N} \pi(a) p_{n,0} = 0$$

Aussi: $\ker \pi \subseteq N_\pi$ et $\exists a \in N_\pi$ pour $h \in \mathbb{N}$, $a r^h$ et $a(r^h)^*$ sont dans N_π .

$$\begin{cases} \pi(a r^h) p_{n,0} = 0 = \pi(a) p_{n,h} \\ \pi(r^{h*}) p_{n,0} = 0 = \pi(a) p_{n,-h} \end{cases} \text{ d'où } \pi(a) = 0.$$

$$A_q \xrightarrow{\pi} B(H)$$

Considérons $\downarrow \quad \nearrow \pi$ où π est un $*$ -isomorphisme

$$A_q / N_\pi = (A_q)_r$$

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & -q r^{h*} \\ r & \alpha^* \end{pmatrix} \text{ corep fondamentale de } SU_q(2)$$

Il suffit de montrer qu'il existe $z \in S((A_q)_r)$ tel que $\tau(u(\alpha)) = 1 (= \tau(u(\alpha^*)))$

Considérons $\pi|_{H_0} \pi(a)|_{H_0}$ avec $H_0 = \overline{\text{span}} \{e_{n,0} : n \in \mathbb{Z}\} \cong \ell_2$

"
D S où S est le shift à droite unilatéral sur ℓ_2 (notons " e_n " " e_n ")

$$\text{et } D: \ell_1 \rightarrow \ell_2 \quad e_n \mapsto \sqrt{1 - q^{2n}} e_n \text{ et } D - \text{id}_{\ell_2} \in K(\ell_1)$$

Regardons ce qui se passe dans l'algèbre de Calkin:

$$\rho: B(\ell_1) \rightarrow B(\ell_1)/K(\ell_1) \cong \mathcal{Q}$$

$$\rho(DS) = \rho(S) \text{ et } SS^* = \text{id}_{\ell_2} \text{ et donc } \rho(S) \text{ unitaire de } \mathcal{Q}.$$

$$S^*S = \uparrow_{\ell_2}$$

$$\text{Ainsi } \sigma(\rho(S)) \subset \pi.$$

On a en fait $\sigma(p(S)) = T$. non, d'exister un plan fermé de $\mathbb{C}$ contenant $\sigma(p(S))$ et donc une détermination continue de $\log, \varphi$, définies sur un ouvert contenant $\sigma(p(S))$ et un $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ hermitien tel que

$$p(S) = e^{\frac{i(-i\varphi(p(S)))}{p(H)}} = e^{iH} \text{ et } S - e^{iH} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

or e^{iH} est inversible : $\text{ind}(e^{iH}) = 0$ et $\text{ind}(S) = -1$

Autre idée : $p(S)$ contient un point du cercle et le automorphisme de S^1 $\leftarrow$ $\text{un automorphisme de } S^1 \text{ qui agit comme l'identité sur } \mathbb{R}$
 Donc $1 \in \sigma(p(S))$ et il existe $\hat{\varepsilon} \in S(\mathcal{E})$ tel que $\hat{\varepsilon}(p(S)) = 1$

On pose ensuite $\tilde{\varepsilon}(a) = \hat{\varepsilon} \circ p(\pi_{H_0} \pi(a) / \pi_{H_0})$ pour $a \in A_0$.

$$\text{On a } \hat{\varepsilon} \in S(A_0) \text{ et } \hat{\varepsilon}(\alpha^*) = \hat{\varepsilon} \circ p(\pi_{H_0} \pi(\alpha^*) / \pi_{H_0}) = \hat{\varepsilon}(p(S)) = 1$$

$$\tilde{\varepsilon} \in S(B(H)) \text{ et } \tilde{\varepsilon}(\pi) = \hat{\varepsilon} \circ p(\pi_{H_0} \pi / \pi_{H_0}) = \hat{\varepsilon}(p(S)) = 1$$

$$\tau \in S(A_0) \text{ pour } \tau(\pi(a)) = \tilde{\varepsilon} \circ \hat{\varepsilon}(\pi(a)) \text{ et } \tau(\pi(\alpha^*)) = 1$$

Lemme: Si $A_0 \xrightarrow{E} A$ pour C^* -algèbre avec espérance conditionnelle E ,
 alors pour toute C^* -algèbre B $B \otimes A_0 \hookrightarrow B \otimes A$ s'étend en un morphisme
 involutif isométrique (et donc symétrique!) $B \otimes_{\max} A_0 \rightarrow B \otimes_{\max} A$
 avec espérance conditionnelle $\text{id}_B \otimes E$.

Dém: $B \otimes_{\max} A_0 \rightarrow B \otimes_{\max} A$ est bien définie et contractante.

$$\text{car } \varphi = \text{id}_B \text{ avec } \varphi = \text{id}_B$$

et $\text{id}_B \otimes E : B \otimes A \rightarrow B \otimes A_0$ s'étend en une contraction

$$B \otimes_{\max} A \rightarrow B \otimes_{\max} A_0$$

et on voit bien que c'est une projection!