A, B C^*-algèbres.

norme maximale sur le $A \odot B$ produit tensoriel algébrique :

$\|x\|_{max} = \sup \{ \|\pi(x)\| : \pi$ rep de $A \odot B$ sur un $B(H)\}$.

et on complète : $A \otimes_{max} B$.

norme minimale sur $A \odot B$: soient $\pi : A \to B(H)$, $\sigma : B \to B(K)$ rep fidèles

$\| \sum_i a_i \otimes b_i \|_{min} = \| \sum_i \pi(a_i) \otimes \sigma(b_i) \|_{B(H \otimes K)}$

et on complète : $A \otimes B$ ou $A \otimes_{min} B$

Propriété universelle : Si $\pi : A \odot B \to C$ est un morphisme involutif, il en existe un unique qui l'étende.

$$\begin{array}{ccc} A \odot B & \longrightarrow & C \\ \cap & \nearrow & \\ A \otimes_{max} B & & \end{array}$$

En particulier, si $\pi_A : A \to C$, $\pi_B : B \to C$ sont des m.i. tels que

$\pi_A(a)\pi_B(b) = \pi_B(b)\pi_A(a)$, il existe un unique "$\pi_A \times \pi_B$" qui l'étende.

$$A \odot B \longrightarrow C \xrightarrow{\text{fidèle}} B(H)$$

$\| \; \|_{min}$ est bien une norme !

$$\begin{array}{ccc} B(H) \odot B(K) & \longrightarrow & B(H \otimes K) \\ x \otimes 1_K & \longmapsto & x \otimes 1_K \\ 1_H \otimes y & \longmapsto & 1_H \otimes y \end{array}$$

est injectif.

Le $\otimes_{min}$ ne dépend pas des rep fidèles utilisées.

Takesaki : $\| \; \|_{min}$ est bien le produit tensoriel minimal.

Corollaire : pour toute C^*-norme $\| \; \|_\alpha$ sur $A \odot B$, on a des m.i. surjectifs

$$A \otimes_{max} B \longrightarrow A \otimes_\alpha B \longrightarrow A \otimes B$$

Ex : Si $\pi : A \otimes B \to C$ est un m.i. injectif sur $A \odot B$.

Alors π est injectif

Si $\varphi : A \xrightarrow{c.p} C$
$\psi : B \xrightarrow{c.p} D$. Alors $\varphi \otimes \psi : A \odot B \to C \odot D$ se prolonge

en une application c.p sur $A \otimes_{min} B$ et $A \otimes_{max} B$.

De plus, $\|\varphi \otimes_{max} \psi\| = \|\varphi \otimes \psi\| = \|\varphi\| \|\psi\|$.

1)
$$C \subset B(H) \quad \pi_A : A \to B(\tilde{H}), \quad V_A : H \to \tilde{H}$$
$$D \subset B(K) \quad \pi_B : B \to B(\tilde{K}) \quad V_B : K \to \tilde{K}.$$

$$\varphi(a) = V_A^* \pi_A(a) V_A$$
$$\psi(b) = V_B^* \pi_B(b) V_B$$

$$\pi_A \otimes \pi_B : A \otimes B \to B(\tilde{H} \otimes \tilde{K}).$$
$$\varphi \otimes \psi(x) = (V_A \otimes V_B)^* \pi_A \otimes \pi_B(x) V_A \otimes V_B$$

2) cas $B = D$, $\psi = id_B$. $C \otimes_{max} B \subset B(H)$ rep. fidèle.
C, B commutent dans ~~$C \otimes_{max} B$~~ $B(H)$

φ et c.p avec $B \subset \varphi(A)'$.

Version de Stinespring : - on peut supposer que $\pi(A) V H$ est dense dans $\tilde{H}$
"minimalité : si $(\pi, V, \tilde{H})$ est une dilatation minimale, alors le commutant $\varphi(A)'$ dans $B(H)$ se dilate aussi à $B(\tilde{H})$.
Il existe $\rho : \varphi(A)' \to \pi(A)' \subset B(\tilde{H})$
tq $\varphi(a) x = V^* \pi(a) \rho(x) V$ pour $a \in A$ et $x \in \varphi(A)'$

On a un m.i de $A \otimes_{max} B$

Le TRICK : $A \subset B$, C C^*-algèbres, $\|\,\|_\alpha$ une C^*-norme sur $B \odot C$;
$\|\,\|_\beta$ la C^*-norme sur $A \odot C$ obtenue par restriction.
Si π_A et π_C sont des rep dont les images commutent, et si $\pi_A \times \pi_C : (A \odot C, \|\,\|_\beta) \to B(H)$ est continu, alors π_A se prolonge en $\varphi : B \xrightarrow{c.c.} B(\pi_C(C))'$

1 Si un gqc avec état de Haar fidèle et counité bornée agit sur une C^*-algèbre, celle-ci est nucléaire si et seulement si l'algèbre des points fixes l'est.

Ex : le gqc lui-même est nucléaire

Ex : si un groupe compact d'automorphismes agit...

si un gqc nucléaire agit ergodiqt...

2 Une espérance conditionnelle E sur une C^*-algèbre A est GNS-fidèle si

$$x \in A,\ E(y^* x^* x y) = 0 \text{ pour } y \in A \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

→ la somme directe des rep GNS associées avec tous les états E-invariants est fidèle.

→ E fidèle $\Rightarrow$ E GNS-fidèle.

$$\begin{array}{c} A \\ E \downarrow \cup \\ A_0 \\ \text{sous-}C^*\text{-algèbre} \end{array} \qquad \begin{array}{c} B \odot A \\ \cup \downarrow i_B \odot E \\ B \odot A_0 \end{array} \quad \text{s'étend en une} \quad \begin{array}{c} B \otimes_{min} A \\ \downarrow i_B \odot E \\ B \otimes_{min} A_0 \end{array}$$

qui est fidèle (GNS-fidèle) si E est fidèle (GNS-fidèle).

E est stablement fidèle (GNS-fidèle) si $\forall B$ C^*-algèbre $i_B \odot E$ s'étend à $\tilde{E} : B \otimes_{max} A \to B \otimes_{max} A$ bornée et fidèle (GNS-fidèle). Alors $\tilde{E}$ est une esp. cond de $B \otimes_{max} A$ sur la fermeture de $B \odot A_0$ dans $B \otimes_{max} A$.

<u>Proposition</u> : soit $\begin{array}{c} A \\ \cup \downarrow E \\ A_0 \\ \text{sous-}C^*\text{-algèbre} \end{array}$ stablement GNS-fidèle. Si A_0 est nucléaire, A l'est.

La réciproque est classique (il suffit que E soit une espérance conditionnelle)

<u>Dem</u> : soit B C^*-algèbre, alors $i : B \odot A \to B \odot A$ s'étend en un $*$-morphisme $\pi : B \otimes_{max} A \to B \otimes_{min} A$

A est nucléaire si π est injectif.

Soit $\tilde{E} : B \otimes_{max} A \to B \otimes_{max} A$ extension de $i_B \odot E$.

Notons $\tilde{E}' = i_B \otimes E : B \otimes_{min} A \to B \otimes_{min} A$ l'espérance conditionnelle. On a

$$\begin{tikzcd} B \otimes_{max} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\tilde{E}"'] & B \otimes_{min} A \arrow[d, "\tilde{E}'"] \\ B \otimes_{max} A \arrow[r, "\pi"] & B \otimes_{min} A \end{tikzcd}$$

Ici, la fermeture de $B \odot A_0$ dans $B \otimes_{max} A$ est $B \otimes A_0$ puisque A_0 est nucléaire.

On a donc
$$\begin{tikzcd} B\otimes_{max}A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\tilde{E}"'] & B\otimes_{min}A \arrow[d, "\tilde{E}'"] \\ B\otimes A_0 \arrow[r, "i_B\otimes A_0"] & B\otimes A_0 \end{tikzcd}$$

Si $x\in\ker\pi$, $\tilde{E}'(\pi(y^*x^*xy))=0$ pour $y\in B\otimes_{max}A$.

Donc $\tilde{E}(y^*x^*xy)=0$

Donc $x=0$.

Donc π est injectif et A est nucléaire.

3 Proposition. Soit $\alpha: G \curvearrowright A$, i.e. $\alpha: G\to \mathrm{Aut}(A)$
A est nucléaire si l'algèbre des points fixes A^α l'est.

Dem : Soit $E_\alpha : A \longrightarrow A^\alpha$
$$a\longmapsto \int \alpha_g(a)\,dg$$

Il suffit de prouver que E_α est stablement fidèle.

L'action $\beta=\iota_B\otimes\alpha$ sur $(B\odot A, \|\cdot\|_{max})$ est isométrique

Si $x\in B\odot A$, $\begin{array}{l} G\longrightarrow (B\odot A,\|\cdot\|_{max}) \\ g\longmapsto \beta_g(x)\end{array}$ est continue.

Donc β s'étend en $\beta^{max}: G\curvearrowright B\otimes_{max}A$

Notons $E_\beta(x)=\int \beta_g^{max}(x)\,dg$ pour $x\in B\otimes_{max}A$

Alors E_β est une esp. cond. fidèle parce que si $x\in(B\otimes_{max}A)_+$,

$E_\beta(x)=0 \Rightarrow \beta_g^{max}(x)=0$ pour tout $g\in G$.

Or, si $x\in B\odot A$, $E_\beta(x)=\int i_B\otimes\alpha_g(x)\,dg = i_B\otimes E_\alpha(x)$.

Donc E_α est stablement fidèle.

4 Généralisation au cas quantique.

Soit (G,Δ) un gqc d'état de Haar h : on a
$$(h\otimes\iota_G)\circ\Delta(x)=(\iota_G\otimes h)\circ\Delta(x)=h(x)1_G$$

Alors $G^\Delta=\{x\in G : \Delta(x)=x\otimes 1_G\}=\mathbb{C}1_G$.

L'état de Haar h n'est pas toujours fidèle ; néanmoins le vecteur cyclique ξ_h pour la représentation GNS π_h est aussi séparant pour $\pi_h(G)''$:

- Δ s'étend en une comultiplication Δ_h sur $M_h = \pi_h(G)''$
- l'état vectoriel ω_{ξ_h} sur M_h est invariant comme l'état de Haar et donc $M_h^{\Delta_h} = \mathbb{C}1_{M_h}$
- $\operatorname{supp} \omega_{\xi_h}|_{M_h} \subset M_h^{\Delta_h}$ et donc $\omega_{\xi_h}|_{M_h} = 1_{M_h}$

Ainsi, en remplaçant G par $G/_{\ker \pi_h}$ si nécessaire, on peut supposer h fidèle.

Soit $\mathcal{A}$ l'ev. des coeff^s des rep. unit. de dim finie de G :
c'est une sous-$*$-algèbre de G contenant 1_G telle que $\Delta(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A} \odot \mathcal{A}$

Notons $\underset{\text{la counité}}{\varepsilon : \mathcal{A} \to \mathbb{C}}$, $\underset{\text{l'antipode}}{\kappa : \mathcal{A} \to \mathcal{A}}$: $\varepsilon \odot \iota_A \circ \Delta = \iota_A \odot \varepsilon \circ \Delta = \iota_A$

Si on note $m : \mathcal{A} \odot \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $a \odot b \mapsto ab$, $m \circ (\kappa \odot \iota_A) \circ \Delta(a) = m \circ (\iota_A \odot \kappa) \circ \Delta(a)$
$= \varepsilon(a) 1_G$

Ainsi $\varepsilon(1_G) = 1$; ε n'est en général pas bornée.
Si ε est borné, elle s'étend en un état multiplicatif sur G, encore noté ε, tel que $(\varepsilon \otimes \iota_G) \circ \Delta = (\iota_G \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \iota_G$ et alors Δ est injectif.

Soit maintenant (G, Δ) g.q.c avec l'état de Haar fidèle et ε counité bornée.
Soit $\alpha : G \curvearrowright A$ une coaction : $\alpha : A \to A \otimes G$ telque $(\alpha \otimes \iota_G) \circ \alpha = (\iota_A \otimes \Delta) \alpha$
$(\iota_A \otimes \varepsilon) \alpha = \iota_A$

Donc α est injective.
La sous-algèbre des points fixes est $A^\alpha = \{ \alpha \in A : \alpha(a) = a \otimes 1_G \}$

Alors **Proposition** : $E : A \to A$, $E = (i_A \otimes h) \circ \alpha$ est une esp. cond. fidèle de A sur A^α

Dem : fidélité ✓. $\operatorname{im} E \supset A^\alpha$ ✓

Montrons que E est idempotent : $E \circ E = (i_A \otimes h) \circ \underbrace{\alpha \circ (i_A \otimes h)} \circ \alpha$
$= (i_A \otimes h) \circ (\alpha \otimes h) \circ \alpha$
$= (i_A \otimes h \otimes h) \circ (\alpha \otimes \iota_G) \circ \alpha$ coaction
$= (i_A \otimes h \otimes h) \circ (i_\alpha \otimes \Delta) \circ \alpha$
$= i_A \otimes ((h \otimes h) \circ \Delta) \circ \alpha$.

Or $(h \otimes h) \circ \Delta(x) = h(x)$

Donc $E \circ E = (i_A \otimes h) \circ \alpha = E$.

$\operatorname{im} E \subset A^\alpha$: $\alpha \circ E = \alpha \circ (i_A \otimes h) \circ \alpha$

$= (i_A \otimes i_G \otimes h) \circ (\alpha \otimes i_G) \circ \alpha$

$= (i_A \otimes i_H \otimes h) \circ (i_A \otimes \Delta) \circ \alpha$ coaction

$= (i_A \otimes ((i_G \otimes h) \circ \Delta)) \circ \alpha$

Or $i_G \otimes h \circ \Delta(x) = h(x) 1_G$

Donc $\alpha \circ E = E \otimes 1_G$.

Lemme : Si B, A et G sont des C^*-algèbres, l'identité sur $B \odot A \odot G$ s'étend en un $*$-morphisme $\rho : B \otimes_{max} (A \otimes_{min} G) \longrightarrow (B \otimes_{max} A) \otimes_{min} G$

Dém : Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert tel que
- A et B agissent fidèlement sur $\mathcal{H}$
- $C^*(B, A) = B \otimes_{max} A$.

Soit $\mathcal{K}$ un e. H. sur lequel G agit fidèlement.

Alors $C^*(B, A, G)$ sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ est $(B \otimes_{max} A) \otimes_{min} G$

$C^*(A, G)$ ——— est $A \otimes_{min} G$

Donc $(B \otimes_{max} A) \otimes_{min} G$ contient des copies de B et $A \otimes_{min} G$ qui commutent. La propriété universelle de $\otimes_{max}$ donne un $*$-morphisme naturel $\rho : B \otimes_{max} (A \otimes_{min} G) \longrightarrow (B \otimes_{max} A) \otimes_{min} G$.

Soit $\alpha : A \longrightarrow A \otimes G$ une coaction et B une C^*-algèbre.

La propriété universelle de $\otimes_{max}$ permet d'étendre $i_B \odot \alpha : B \odot A \longrightarrow B \odot (A \otimes G)$ en $i_B \otimes \alpha : B \otimes_{max} A \longrightarrow B \otimes_{max} (A \otimes G)$. Alors

$\tilde{\alpha} : B \otimes_{max} A \xrightarrow{i_B \otimes \alpha} B \otimes_{max} (A \otimes G) \xrightarrow{\rho} (B \otimes_{max} A) \otimes G$ est un $*$-morphisme.

Lemme : $\tilde{\alpha}$ est une coaction de G sur $B \otimes_{max} A$

1) $(\iota_{B\otimes_{max} A} \otimes \varepsilon) \circ \tilde{\alpha} = \iota_{B \otimes_{max} A}$

$(\iota \otimes \varepsilon) \circ \tilde{\alpha}\,(b \otimes 1_A) = (\iota \otimes \varepsilon)(b \otimes 1_A \otimes 1_G) = b \otimes 1_A$ pour tout $b \in B$.

Identifions $(\iota \otimes \varepsilon) \circ \rho : B \otimes_{max} (A \otimes G) \longrightarrow B \otimes_{max} A$

$$b \otimes (a \otimes g) \longmapsto b \otimes (\varepsilon(g) a)$$

Donc $(\iota \otimes \varepsilon) \circ \rho : b \otimes x \longmapsto b \otimes ((\iota_A \otimes \varepsilon)(x))$

et $(\iota \otimes \varepsilon) \circ \tilde{\alpha}\,(1_B \otimes a) = (\iota \otimes \varepsilon) \circ \rho\,(\iota_B \otimes \alpha(a))$

$= 1_B \otimes ((\iota_A \otimes \varepsilon)\, \alpha(a))$

$= 1_B \otimes a$ pour $a \in A$.

Comme ε est multiplicatif, $(\iota \otimes \varepsilon) \circ \tilde{\alpha}$ est l'identité sur $B \odot A$

et donc par continuité sur $B \otimes_{max} A$. Donc $\tilde{\alpha}$ est injectif !

Donc $\rho|_{(\iota_B \otimes \alpha)(B \otimes_{max} A)}$ est injectif : on a

$$\begin{tikzcd}
B \otimes_{max} A \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{B\otimes_{max} A}"] & B \otimes_{max} (A \otimes G) \arrow[r, shift left, "\iota_B \otimes (\alpha \otimes \iota_G)"] \arrow[r, shift right, "\iota_B \otimes (\iota_A \otimes \delta)"'] \arrow[d, "\rho"] & B \otimes_{max} ((A \otimes G) \otimes G) \arrow[d, "\rho'"] \\
B \otimes_{max} A \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] & (B \otimes_{max} A) \otimes G \arrow[r, shift left, "\tilde{\alpha} \otimes \iota_G"] \arrow[r, shift right, "\iota_{B\otimes_{max} A} \otimes \delta"'] & (B \otimes_{max} A) \otimes G \otimes G
\end{tikzcd}$$

où ρ' est construit comme ρ.

Donc $\tilde{\alpha}$ est une coaction.

Proposition : E est stablement fidèle.

Dém : si B est une C^*-algèbre, $\tilde{E}$ esp. cond sur $B \otimes_{max} A$ étendant $\iota_B \otimes E$ sur $B \odot A$

est l'esp. cond. associée à $\tilde{\alpha}$ est donc fidèle.

Corollaire : les théorèmes recherchés.