François
9/4/2013

Règle de fusion pour les groupes quantiques de réflexions

D'après Banica et Vergnioux.

① Groupes q de réflexions complexes

Déf : $H_N^{s+} = (C(H_N^{s+}), \Delta)$

$\llcorner$ C^*-algèbre universelle engendrée par N^2 éléments U_{ij} normaux tq

(i) $U = (U_{ij})$ et ${}^tU = (U_{ji})$ sont unitaires

(ii) $U_{ij}U_{ij}^*$ projection

(iii) $U_{ij}^s = U_{ij}U_{ij}^*$ et $\Delta(U_{ij}) = \sum U_{ik} \otimes U_{kj}$

Rem : si $s=1$, $H_N^{1+} = S_N^+$ groupe q de permutations : $C(S_N^+)$ est engendrée par une matrice unitaire magique v (chaque ligne et chaque colonne égalent 1, sont composées de proj$^\perp$)

Th : $C(H_N^{s+}) \simeq C^*(\mathbb{Z}_s) *_w C(S_N^+) = C^*(\mathbb{Z}_s)^{*N} * C(S_N^+) \big/ \langle [z_i, v_{ij}] = 0 \rangle$

On a $U_{ij} \leftrightarrow z_i v_{ij}$

Rem : si $s = \infty$, on enlève la relation iii : $H_N^{\infty +}$

Lemme d'échauffement :
(i) $U_{ij}U_{ij}^*U_{ij} = U_{ij}$
(ii) $U_{ij}^* = U_{ij}^{s-1}$
(iii) $U_{ij}U_{ik} = 0$ si $j \neq k$

Preuve :
- $a = (U_{ij}U_{ij}^* - 1)U_{ij}$: $aa^* = 0$ et donc $a = 0$
- $a = U_{ij}^* - U_{ij}^{s-1}$: $aa^* = 0$ et donc $a = 0$.
- On a $\sum_j U_{ij}U_{ij}^* = 1$ et donc $p_{ij} = U_{ij}U_{ij}^* \perp p_{ik}$ si $j \neq k$.

$$U_{ij}U_{ij}^*U_{ik}U_{ik}^* = 0 \quad \text{et donc } U_{ij}U_{ik} = 0$$

U_{ij} $\qquad$ U_{ik}

Th : H_N^{s+} admet une famille de corepresentations $\{U_k : k \in \mathbb{Z}\}$ telle que

(i) $U_k = (U_{ij}^k)$, $k \geq 0$. (Où on pose $U_{ij}^0 = U_{ij}^s = U_{ij}U_{ij}^*$)

(ii) $U_k = U_{k+s}$ si $k \in \mathbb{Z}$

(iii) $\overline{U_k} = U_{-k}$ si $k \in \mathbb{Z}$.

François ②

Dém : si $k>0$, $\Delta(U_{ij}^{k}) = \Delta(U_{ij})^{k} = \left(\sum_{\ell=1}^{N} U_{i\ell}\otimes U_{\ell j}\right)^{k} =$

$$= \sum_{\ell_1,\dots,\ell_k} U_{i\ell_1}\cdots U_{i\ell_k}\otimes U_{\ell_1 j}\cdots U_{\ell_k j}$$

$$= \sum_{\ell} U_{i\ell}^{k}\otimes U_{\ell j}^{k}$$

et si $k>0$, $U_{ij}^{k+1} = U_{ij}^{k}U_{ij} = U_{ij}^{k}U_{ij}U_{ij}^{*} = U_{ij}^{k}$

(iii) s'obtient par le (ii) du lemme précédent.

$U_{ij}^{k*} = U_{ij}^{(n-1)k}$ et $\begin{cases} \overline{U_k} = (U_{ij}^{k*}) \\ \text{les } U_k \text{ sont définis modulo } n \end{cases}$ et donc $\overline{U_k} = U_{-k}$.

Questions : – Lesquelles des U_k sont-elles irréductibles ?

– Quelles sont les règles de fusion ?

② C^*-catégories tensorielles, dualité de Tannaka-Krein et partitions non croisées.

Déf : Une C^*-catégorie tensorielle (stricte) est une catégorie $\mathcal{C}$ telle que

(i) $\mathrm{Mor}(U,V)$ est un espace de Banach $\|ST\| \le \|S\|\|T\|$

(ii) Il existe un foncteur contravariant $*$ qui est l'Id sur les objets et

$\begin{cases} T \mapsto T^{*} \text{ est antilinéaire} \\ T^{**} = T \\ TT^{*} \ge 0 \text{ dans } \mathrm{End}(U) \end{cases}$

$\|TT^{*}\| = \|T\|^{2}$ [$\mathrm{End}(U)$ est une C^*-algèbre]

(iii) Il existe $\otimes : \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ bifoncteur (i.e., $(U\otimes V)\otimes W = U\otimes(V\otimes W)$)

et $1\in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ tel que $1\otimes U = U\otimes 1 = U$.

(v) $(S\otimes T)^{*} = S^{*}\otimes T^{*}$

(vi) Si $U,V\in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, il existe $W\in\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et $u,v\in \mathrm{Mor}(U,W)\times\mathrm{Mor}(V,W)$

tels que $u^{*}u = id$, $v^{*}v = id$ (u et v sont des isométries) et $uu^{*}+vv^{*} = id$.

(vii) Si $U\in\mathrm{ob}(\mathcal{C})$, $p\in\mathrm{End}(U)$ tel que $p = p^{*} = p^{2}$, il existe $V\in\mathrm{ob}(\mathcal{C})$

et $v\in\mathrm{Mor}(V,U)$ isométrie telle que $vv^{*} = p$

(viii) $\mathrm{End}(1) = \mathbb{C}$

(ix) $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ est un ensemble !

Ex : $\mathbb{G} = (A,\Delta)$ GQC donne lieu à la catégorie $\mathcal{C}$ dont les <u>objets</u> sont les coreprésentations unitaires de dim finie de $\mathbb{G}$ et les <u>morphismes</u> les entrelaceurs entre ces coreprésentations.

et pour les corep^{s} $\begin{cases} U\in A\otimes B(H_U) \\ V\in A\otimes B(H_V) \end{cases}$, $V(1\otimes T) = (1\otimes T)U$, $T\in B(H_U,H_V)$ est un entrelaceur.

Remarque: Cette C^*-catégorie tensorielle est concrète au sens où chaque objet est "donné" avec un espace de Hilbert $H_U \in Hilb_f$:

$$\mathcal{C} = \left\{ ob(\mathcal{C}),\ \{H_U\}_{U\in ob(\mathcal{C})},\ \{Mor(U,V)\}_{U,V\in ob(\mathcal{C})} \right\}$$

Rappel: ① Théorème (Woronowicz) Toute corepresentation irréductible d'un GQCM est contenu dans le produit tensoriel de suffisamment de copie de U et $\bar U$ où U est la fondamentale de G.

② Déf (conjuguée): Si $U \in ob(\mathcal{C})$, $\bar U$ est un conjugué de U s'il existe $\bar R : 1 \to U\otimes\bar U$, $R : 1 \to \bar U\otimes U$ tels que

$$U \xrightarrow{1\otimes R} U\otimes\bar U\otimes U \xrightarrow{\bar R^*\otimes 1} U$$
$$U \xrightarrow{\bar R\otimes 1} U\otimes\bar U\otimes U \xrightarrow{1\otimes R^*} U$$

soient l'identité.

③ **Théorème:** dualité de Frobenius : si $U, V, W \in ob(\mathcal{C})$,

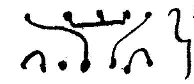
$$Mor(U\otimes V, W) \xrightarrow{\sim} Mor(V, \bar U\otimes W)$$
$$T \longmapsto (1_{\bar U}\otimes T)(R\otimes 1_V)$$
$$(\bar R^*\otimes 1_W)(1_U\otimes S) \longleftarrow S$$

"trivial selon Neshveyev-Tuset"

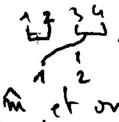
Théorème: (dualité de Tannaka-Krein) Soit $\mathcal{C} = \{ob(\mathcal{C}), \{H_U\}_{U\in ob(\mathcal{C})}, \{Mor(U,V)\}_{U,V\in ob(\mathcal{C})}\}$ une C^* catégorie tensorielle concrète avec conjugué. Supposons de plus qu'il existe U_0 tel que $\{U_0, \bar U_0\}$ engendre toute la catégorie. Alors il existe un GQC matriciel $G = (A_0, \Delta, u)$ et une famille $\{r_U\}_{U\in ob(\mathcal{C})}$ de corep.s unitaires de dimension finie de G (avec $r_{U_0} = u$) telle que si $U, V \in ob(\mathcal{C})$, $r_V(1\otimes T) = (1\otimes T) r_U \Leftrightarrow T \in Mor(U,V)$.

De plus, toute corep. unitaire de G est équivalente à une r_U, $U \in ob(\mathcal{C})$.

2B Partitions non croisées

Une partition non croisée $p \in NC(k,l)$ s'écrit $p = \Big\{$  $\Big\}$ k points, l points

Exemple avec 6 points: $\Big\{$  $\Big\} \in NC(0,6)$ et correspond à $\{\{1,2,5\},\{3,4\},\{6\}\}$

$\Big\{$  $\Big\} \in NC(4,2)$

Ces deux partitions sont les mêmes et on peut ainsi écrire $NC(k,0) \cong NC(0,k+l)$ en mettant les points du haut vers le bas en ordre inverse.

Déf : si $p \in NC(k,\ell)$, on définit $T_p : \mathbb{C}^{N\otimes k} \longrightarrow \mathbb{C}^{N\otimes \ell}$

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \longmapsto \sum_{j_1,\dots,j_\ell} p(i,j)\, e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_\ell}$$

et $p(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si toutes les branches de mon diagramme relient des indices égaux.} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Ex : $p = \left\{ \begin{smallmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ j_1 & j_2 & & \end{smallmatrix} \right\}$ $\quad p(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i_1 = i_2 = j_2 \text{ et } i_3 = i_4 . \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$p = \left\{ \sqcup \atop | \right\}$: $T_p : \mathbb{C}^{N\otimes 2} \longrightarrow \mathbb{C}^N$

$$e_a \otimes e_b \longmapsto \sum_c p((a,b),c)\, e_c = \delta_{ab} e_c .$$

$p = \{ | \}$: $T_p(e_a) = e_a$ et $p = \left\{ \emptyset \atop \cap \right\}$ $T_p(1) = \sum_a e_a^{\otimes 2}$

Déf : $p \otimes q$ = concaténation horizontale si $p = \left\{ \begin{smallmatrix} 1\,2 & 3 \\ 1\,2 & \end{smallmatrix} \right\}$ et $q = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3\,4 \\ 1 & 2 & \end{smallmatrix} \right\}$

alors $p \otimes q = \left\{ \begin{smallmatrix} 1\,2 & 3 & 4 & 5 & 6\,7 \\ 1\,2 & 3 & 4 & & \end{smallmatrix} \right\}$.

pq = concaténation verticale moins les blocs fermés

Autre exemple : $p = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2\,3 \\ 1\,2 & \end{smallmatrix} \right\}$, $q = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2\,3 & 4 \\ 1 & 2\,3 & \end{smallmatrix} \right\}$ $\quad p = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2\,3 \\ 1 & \end{smallmatrix} \right\}$ $\quad q = \left\{ \begin{smallmatrix} 1\,2 & 3 & 4 \\ 1\,2 & 3 & \end{smallmatrix} \right\}$

$pq = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2\,3 & 4 \\ 1 & 2\,3 & \\ 1\,2 & & \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2\,3 & 4 \\ 1\,2 & & \end{smallmatrix} \right\}$ $\quad pq = \left\{ \begin{smallmatrix} 1\,2 & 3 & 4 \\ 1\,2\,3 & & \\ 1 & & \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} 1\,2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & \end{smallmatrix} \right\}$

Si $p = \{ p \}^k_\ell$, $p^* = \{ p \}^\ell_k$: $\quad p = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2\,3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix} \right\}$

$p^* = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2\,3 \end{smallmatrix} \right\}$

Prop : 1) $T_p \otimes T_q = T_{p\otimes q}$

2) $T_p \circ T_q = N^{b(p,q)} T_{pq}$ $\quad b(p,q) \in \mathbb{N}$ est le nombre de blocs effacés.

(exercice). 3) $T_p^* = T_{p^*}$

4) $T_{\{|\}} = id$.

La collection des span $\{T_p : p \in NC(k,\ell)\}$ est une C^*-catégorie tensorielle concrète avec conjugués, dont les objets sont les $k \in \mathbb{N}$, $H_k = \mathbb{C}^{N\otimes k}$

$Mor(k,\ell) = \operatorname{span}\{T_p : \mathbb{C}^{N\otimes k} \to \mathbb{C}^{N\otimes \ell} : p \in NC(k,\ell)\}$

Conjugués : Soit $k \in \mathbb{N}$ et $r = \left\{ \text{(\dots} \cap \text{\dots)} \right\} \in NC(0,2k)$

Considérons $R : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^{N\otimes 2k}$

$$1 \longmapsto \sum_{a_1,\dots,a_k} e_{a_1} \otimes \cdots \otimes e_{a_k} \otimes e_{a_k} \otimes \cdots \otimes e_{a_1} .$$

$$\left(id_{\mathbb{C}^{N\otimes k}}\otimes R^*\right)\left(R\otimes id_{\mathbb{C}^{N\otimes k}}\right)\left(1\otimes e_{b_1}\otimes\cdots\otimes e_{b_k}\right)=\left(id_{\mathbb{C}^{N\otimes k}}\otimes R^*\right)\left(\sum_{a_1\ldots a_k}' e_{a_1}\otimes\cdots\otimes e_{a_k}\otimes e_{a_k}\otimes\cdots\otimes e_{a_1}\otimes e_{b_1}\otimes\cdots\otimes e_{b_k}\right)$$

$$=\sum_{a_1,\ldots,a_k}' e_{a_1}\otimes\cdots\otimes e_{a_k}\left(\delta_{a_1b_1}\cdots\delta_{a_kb_k}\right)=e_{b_1}\otimes\cdots\otimes e_{b_k},$$

i.e., $\left(id_{\mathbb{C}^{N\otimes k}}\otimes R^*\right)\left(R\otimes id_{\mathbb{C}^{N\otimes k}}\right)=id_{\mathbb{C}^{N\otimes k}}$: $\quad$ = ||||

R implémente l'application de dualité.

Frobenius / partitions non croisée :

$$\mathrm{Hom}(V,\bar{U}\otimes W)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}(U\otimes V,W)$$
$$S\longmapsto(\bar{R}^*\otimes 1_W)(1_U\otimes S)$$

$p_{06}=\left\{\underset{1\;2\;3\;4\;5\;6}{\overset{\emptyset}{\sqcap\sqcap\sqcap}}\right\}$, $\xi=T_{p_{06}}(1)=\sum_{a,b,c}' e_a\otimes e_a\otimes e_b\otimes e_b\otimes e_a\otimes e_c$

12

$p_{42}=\{\ldots\}$

$$\left(R^*\otimes id_{\mathbb{C}^{N\otimes 2}}\right)\underbrace{\left(id_{\mathbb{C}^{N\otimes 4}}\otimes\xi\right)\left(e_{a_1}\otimes e_{a_2}\otimes e_{a_3}\otimes e_{a_4}\right)}_{e_{a_1}\otimes e_{a_2}\otimes e_{a_3}\otimes e_{a_4}\otimes\sum'_{a,b,c}e_a^{\otimes 2}\otimes e_b^{\otimes 2}\otimes e_a\otimes e_c}$$

$$=\delta_{a_4a_3}\delta_{a_1a_2}\sum_c e_{a_3}\otimes e_c$$

Théorème : Si v est une génératrice de S_N^+, $\mathrm{Hom}(v^{\otimes k},v^{\otimes l})=\mathrm{span}\{T_p : p\in NC(k,l)\}$

Si $N\geq 4$, les T_p sont linéairement indépendants !

Th : H_N^{s+} : on a les U_h, $h\in\mathbb{Z}$, $U_h=(U_{ij}^h)$, et

$$\mathrm{Hom}(U_{i_1}\otimes\cdots\otimes U_{i_k};U_{j_1}\otimes\cdots\otimes U_{j_l})=\mathrm{span}\{T_p : p\in NC_s(i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l)\}$$

Où $NC_s(i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_l)=\left\{\underset{j_1\ldots j_l}{\overset{i_1\ldots i_k}{p}}\right\}$ tel que $\sum' i_t=\sum' j_q$ [mod. s] dans chaque bloc !

$[U_i, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{N\otimes k}}(\ldots)=\ldots\mathbb{Z}_s^k]$

Ex : $\left\{\underset{0}{\overset{1\;s-1}{\sqcap}}\right\}\in NC_s((1,s-1);0)$.

Dém : • $\supseteq$ Soit T_p comme dans l'énoncé : montrons que T_p est un entrelaceur.

• Frobenius permet de faire le raisonnement pour $k=0$.

• On peut se restreindre au cas des partitions "d'un bloc" $\left\{\overset{\emptyset}{\sqcap\sqcap\sqcap}\right\}$

$$\mathrm{Hom}(U_{i_1} \dots U_{i_k}; U_{j_1} \otimes \dots \otimes U_{j_l}) \simeq \mathrm{Hom}(1, U_{-i_1} \otimes \dots \otimes U_{-i_k} \otimes U_{j_l} \otimes \dots \otimes U_{j_1})$$

$$\begin{pmatrix} i_1 \dots i_k \\ j_1 \dots j_l \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left\{ \begin{matrix} \emptyset \\ -i_1 \dots -i_k \; j_1 \dots j_l \end{matrix} \right\}$$

Supposons que $k = 0$ a été traité. $\mathrm{Hom}(U_{i_1} \otimes \dots \otimes U_{i_k}; U_{j_1} \otimes \dots \otimes U_{j_l}) = \mathrm{Hom}(1, U_{-i_1} \otimes \dots \otimes U_{-i_k} \otimes U_{j_1} \otimes \dots \otimes U_{j_l})$

peut être déduit de Frobenius

$$= \mathrm{Span}\{T_p : p \in NC_2(\emptyset; -i_1, \dots, -i_k, j_1, \dots, j_l)$$

$$= \mathrm{Span}\{T_p : p \in NC_2(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_l)\}$$