14/5/2013

Soulaymane

Sous-groupes quantiques et états idempotents
(SGQ)

<u>Définition</u> : • un <u>SGQ compact (SGQC)</u> d'un GQC (A, Δ_A) est une paire $(\pi, H=(B,\Delta_B))$ où (B,Δ_B) est un autre GQC et $\pi : A \longrightarrow B$ un $*$-homomorphisme unifère surjectif tel que $(\pi\otimes\pi)\circ\Delta_A = \Delta_B\circ\pi$

• Un état $\varphi : A \to \mathbb{C}$ d'un groupe QC est <u>idempotent</u> si

$$\varphi \star \varphi = (\varphi\otimes\varphi)\circ\Delta_A = \varphi.$$

Exemple ① L'état de Haar h de $G=(A,\Delta_A)$ est un état idempotent.

En effet, par définition, on a pour $\rho \in A^*$ $\begin{cases} \rho \star h = \rho(1)h \\ \text{ou} \\ h\star\rho = \rho(1)h \end{cases}$ et en particulier,

on a $h \star h = h(1)h = h$.

② Plus généralement, si (B,Δ_B) est un SGQC de (A,Δ_A),

$$\begin{aligned}(h_B\circ\pi)\star(h_B\circ\pi) = (h_B\circ\pi)\otimes(h_B\circ\pi)\circ\Delta_A &= (h_B\otimes h_B)\circ(\pi\otimes\pi)\circ\Delta_A \\ &= (h_B\otimes h_B)\circ\Delta_B\circ\pi \\ &= h_B\star h_B\circ\pi = h_B\circ\pi.\end{aligned}$$

Donc $h_B\circ\pi$ est un état idempotent sur le GQC (A,Δ_A).

Définition : Un état idempotent φ de $G=(A,\Delta_A)$ est dit <u>de Haar</u> s'il est de la forme $\varphi = h_B\circ\pi$ pour un SGQC $(\pi, H=(B,\Delta_B))$.

<u>1er exemple : le cas commutatif</u> : Si (A,Δ) est un GQC commutatif, alors $A \simeq C(G)$ avec G groupe compact, où le coproduit $\Delta_G : C(G) \to C(G)\otimes C(G) \underset{12}{\simeq} C(G\times G)$ est donné par $\Delta_G(f)(g_1,g_2) = f(g_1g_2)$ pour $f\in C(G)$ et $g_1,g_2\in G$.

L'état de Haar h de (A,Δ) est donné par $h(f) = \int f\,d\mu$ avec $f\in A\simeq C(G)$ et μ la mesure de Haar sur G.

Soulaymane ②

Proposition 1 : $(C(H), \Delta_H)$ est un sous-groupe quantique de $(C(G), \Delta_G)$ si et seulement si H est un ~~homéomorphe à~~ un sous-groupe fermé de G.

(⇒) Soit $\pi : C(G) \to C(H)$ morphisme involutif surjectif unifère tel que $(\pi \otimes \pi) \circ \Delta_G = \Delta_H \circ \pi$, et définissons $\tilde{\pi} : H = \mathrm{Spec}(B) \to G = \mathrm{Spec}(A)$ tel que $\tilde{\pi} \circ \varphi = \varphi \circ \pi$ pour tout $\varphi \in \mathrm{Spec}\, B$. On a

$$\tilde{\pi}(\varphi_1 \varphi_2) = (\varphi_1 \varphi_2) \circ \pi \overset{(*)}{=} (\varphi_1 \circ \pi)(\varphi_2 \circ \pi) = \tilde{\pi}(\varphi_1) \star \tilde{\pi}(\varphi_2)$$

et $\tilde{\pi}(\varphi_1) = \tilde{\pi}(\varphi_2) \Rightarrow \varphi_1 \circ \pi = \varphi_2 \circ \pi \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$ puisque π est surjectif. Donc $\tilde{\pi}$ est injectif.

(*) on a

$$\begin{aligned}(\varphi_1 \varphi_2) \circ \pi &= (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ \Delta_B \circ \pi = (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ (\pi \otimes \pi) \circ \Delta_A \\ &= (\varphi_1 \circ \pi) \otimes (\varphi_2 \circ \pi) \circ \Delta_A = (\tilde{\pi}(\varphi_1) \otimes \tilde{\pi}(\varphi_2)) \circ \Delta_A \\ &= \tilde{\pi}(\varphi_1) \star \tilde{\pi}(\varphi_2)\end{aligned}$$

Donc H est un sous-groupe de G. Montrons que H est fermé.

Soit $\varphi_n \in H = \mathrm{spec}\, B$ tel que $\varphi_n \to \varphi$. Alors $\tilde{\pi}(\varphi_n) = \varphi_n \circ \pi \longrightarrow \varphi \circ \pi = \tilde{\pi}(\varphi)$.

Donc $\varphi \in H = \mathrm{spec}\, B$. Donc H est fermé.

(On aurait aussi pu invoquer que l'image d'un compact est compacte et donc fermée)
On aurait dû vérifier que $\tilde{\pi}$ est continu !

(⇐) Soit H un sous-groupe fermé de G. Considérons $\pi : C(G) \to C(H)$, $f \mapsto f|_H$.

Alors π est bien un morphisme involutif unital et qui est surjectif par Tietze-Urysohn. $\Delta_H \circ \pi : C(G) \to C(H)$, $f \mapsto f_{|H \times H} : H \times H \to \mathbb{C}$, $(h_1, h_2) \mapsto f(h_1 h_2)$

c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}\Delta_H \circ \pi(f) = f(h_1 h_2) &= f(\cdot\,\cdot)|_{H \times H}(h_1, h_2) \\ &= \Delta_G(f)|_{H \times H} \\ &= (\pi \otimes \pi) \circ \Delta_G(f)\end{aligned}$$

et $\Delta_H \circ \pi = (\pi \otimes \pi) \circ \Delta_G$ et $(C(H), \Delta_H)$ est bien un sgq de $(C(G), \Delta_G)$

Souleymane (3)

Proposition 2 : Soit $(C(G), \Delta_G)$ un GQC commutatif. Les états idempotents sur $C(G)$ sont de la forme $h(f) = \int f \, d\mu$ avec μ la mesure de Haar sur un sous-groupe compact de G. Ils sont donc tous de Haar.

Dém : $h(f) = \int f \, d\mu$ avec μ mesure de Haar sur un sous-groupe compact de G. Alors $h \in C(G)^*$ et c'est l'état de Haar de $(C(G), \Delta_G)$. Or un état de Haar est un état idempotent. Réciproqᵗ, le th de Riesz combiné avec le théorème de Kawada-Itô montre que les états idempotents sont tous de Haar.

Proposition 3 : Soit $G = (A, \Delta_A)$ un GQC et $\varphi \in A^*$ idempotent. Alors φ est ~~un idempo-~~ ~~tent~~ de Haar ssi $N_\varphi = \{a \in A : \varphi(a^* a) = 0\}$ est un idéal bilatère

Démonstration : $(\Rightarrow)$ Supposons que φ soit un état idempotent de Haar, c'est-à-dire que $\varphi = h_B \circ \pi$, où $(\pi, (B, \Delta_B))$ est un sgq de (A, Δ_A) et h_B est l'état de Haar de (B, Δ_B). Alors

$$
\begin{aligned}
N_\varphi &= \{a \in A : \varphi(a^* a) = 0\} \\
&= \{a \in A : h_B \circ \pi(a^* a) = 0\} \\
(\text{si } h \text{ fidèle !}) &= \{a \in A : \pi(a^* a) = 0\} \\
&= \{a \in A : \pi(a) = 0\} = \ker \pi
\end{aligned}
$$

Or un noyau est un idéal bilatère !

Et si h n'est pas fidèle ?! (cf. ArXiv KMS !!) on sait que le noyau de h_B est un idéal bilatère et ce qui nous intéresse en est l'image réciproque par π.

Subtilité technique : dans le cas non coamenable, quelle C^*-algèbre prend-on ?

$(\Leftarrow)$ Si N_φ est bilatère, posons $B := A / N_\varphi$ et $\pi_\varphi : A \to B$ l'application quotient. Posons $\psi : B = A/N_\varphi \to \mathbb{C}$, $a + N_\varphi \mapsto \varphi(a)$. Alors $\varphi = \psi \circ \pi_\varphi$.

Le coproduit sur B est défini par : $\Delta_B \circ \pi_\varphi(a) = (\pi_\varphi \otimes \pi_\varphi) \circ \Delta_A(a) \in B \otimes B$

Alors Δ_B est bien un $*$-morphisme unital parce que Δ_A est un coproduit.

La bisimplifiabilité quantique découle de : $(B \otimes 1_B)\Delta_B(B) = (\pi_\varphi \otimes \pi_\varphi)(A \otimes 1_A)\Delta_A(A)$. et de la bisimplifiabilité de (A, Δ_A).

(cf l'article de Murphy-Tuset !) Donc φ est un état de Haar sur (B, Δ_B) et par conséquent $\pi = \varphi \circ \pi \varphi$ est un idempotent de Haar.

Revenons à la prop 2.

<u>2e exemple:</u> Cas cocommutatif. Soit G un groupe discret d'élément neutre e et A la C^*-algèbre universelle engendrée par λ_g avec les relations $\lambda_g^* = \lambda_{g^{-1}}$ et $\lambda_{g_1}\lambda_{g_2} = \lambda_{g_1 g_2}$ pour $g, g_1, g_2 \in G$.

A munie du $*$-homomorphisme unifère $\Delta : A \to A \otimes A$ défini par

$\Delta \lambda_g = \lambda_g \otimes \lambda_g$ est un GQC.

$\Delta^{op} \lambda_g = (\tau \circ \Delta)(\lambda_g) = \tau(\lambda_g \otimes \lambda_g) = \lambda_g \otimes \lambda_g = \Delta \lambda_g$ et donc $\Delta^{op} = \Delta$.
où τ est la volte.

Autrement dit (A, Δ) est <u>cocommutatif</u>.
En fait, tout groupe Q cocommutatif provient d'un groupe discret.
L'état de Haar est donné par $h(\lambda_g) = \delta_{eg} = \begin{cases} 1 & \text{si } e = g \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

<u>Proposition</u>: Soit G un groupe discret $G_0 \subseteq G$. Posons $\varphi : C_u^*(G) \to \mathbb{C}$, $\lambda_g \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } g \in G_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. φ est un état idempotent $\iff$ G_0 est un sous-groupe de G.
2. φ est de plus de Haar $\iff$ G_0 est de plus distingué.

<u>Dém</u> : 1. $\Rightarrow$ Si G_0 n'est pas un sous-groupe, φ est une fonctionnelle idempotente mais pas un état car non positif.

En effet, si G_0 n'est pas un sg, on peut choisir $s_1, s_2 \in G_0$ tels que $s_1^{-1}s_2 \in G_0$, $s_2^{-1}s_1 \notin G_0$

Soit $a = (z\lambda_{s_1} + \lambda_{s_2})^*(z\lambda_{s_1} + \lambda_{s_2}) \geq 0$, où $z \in \mathbb{C}$.

Alors $a = |z|^2\lambda_e + \bar{z}\lambda_{s_1^{-1}s_2} + z\lambda_{s_2^{-1}s_1} + \lambda_e$. Calculons $\varphi(a)$:

$\varphi(a) = \varphi(|z|^2\lambda_e + \bar{z}\lambda_{s_1^{-1}s_2} + z\lambda_{s_2^{-1}s_1} + \lambda_e) = |z|^2 \underbrace{\varphi(\lambda_e)}_{=1} + \bar{z}\underbrace{\varphi(\lambda_{s_1^{-1}s_2})}_{=1} + z\underbrace{\varphi(\lambda_{s_2^{-1}s_1})}_{=0} + \underbrace{\varphi(\lambda_e)}_{=1}$

cf. : Heyer, Probability.

$= |z|^2 + \bar{z} + 1$ qui n'est pas forcément positive.

⇐ Supposons que G_0 est un sous-groupe de G. Alors φ est bien un état :

$$(\varphi \star \varphi)(\lambda_g) = (\varphi\otimes\varphi)\circ\Delta_G(\lambda_g) = (\varphi\otimes\varphi)(\lambda_g\otimes\lambda_g) = \varphi(\lambda_g)\varphi(\lambda_g) = \begin{cases}1\times 1 & \text{si } g\in G_0\\ 0\times 0 & \text{si } g\notin G_0\end{cases} = \begin{cases}1 & \text{si } g\in G_0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Donc φ est un état idempotent. [on aurait dû travailler avec la représentation GNS de φ].

(?) (⇒) Supposons que G_0 ~~ne~~ soit ~~pas~~ un sous-groupe non distingué de G.

Soit $s_1, s_2\in G_0$ et $u,v\in\mathbb{C}$. Posons $a = u\lambda_e + v\lambda_{s_1} + \lambda_{s_2}$

Alors $a^*a = (u\lambda_e + v\lambda_{s_1}+\lambda_{s_2})^*(u\lambda_e+v\lambda_{s_1}+\lambda_{s_2})$

$= |u|^2\lambda_e + \bar u v\lambda_{s_1} + \bar u\lambda_{s_2} + \bar v u\lambda_{s_1^{-1}} + |v|^2\lambda_e + \bar v\lambda_{s_1^{-1}s_2} + u\lambda_{s_2^{-1}} + v\lambda_{s_2^{-1}s_1} + \lambda_e$

Calculons $\varphi(a^*a) = |u|^2\underbrace{\varphi(\lambda_e)}_{1} + \bar u v\underbrace{\varphi(\lambda_{s_1})}_{1} + \bar u\underbrace{\varphi(\lambda_{s_2})}_{1} + \bar v u\underbrace{\varphi(\lambda_{s_1^{-1}})}_{1} + |v|^2\underbrace{\varphi(\lambda_e)}_{1}$
$+ v\varphi(\lambda_{s_2^{-1}s_1}) + \bar v\varphi(\lambda_{s_1^{-1}s_2}) + u\underbrace{\varphi(\lambda_{s_2^{-1}})}_{1} + \underbrace{\varphi(\lambda_e)}_{1}$

$= (|u|^2+|v|^2+1) + \bar u v + \bar u + \bar v u + \bar v\varphi(\lambda_{s_1^{-1}s_2}) + u + v\varphi(\lambda_{s_2^{-1}s_1})$

$a = \lambda e$) on va terminer cette preuve la prochaine fois !

(⇐) Supposons que G_0 soit distingué dans G. Soit $\mathcal{B} = C^*_u(G/G_0)$ et posons $\pi : C^*_u(G)\to\mathcal{B}$, $f=\sum'_{g\in G}\alpha_g\lambda_g \mapsto \sum'_{g\in G}\alpha_g\lambda_{[g]}$ et munissons $\mathcal{B}$ de l'état de Haar $h_{\mathcal{B}}\left(\sum_{k\in G/G_0}\alpha_k\lambda_k\right) = \alpha_{[e]}$. On obtient que $h_{\mathcal{B}}\circ\pi(f) = h_{\mathcal{B}}\left(\sum'_{g\in G}\alpha_g\lambda_{[g]}\right) = \sum'_{k\in G_0}\alpha_k = \varphi(f)$. On a bien $h_{\mathcal{B}}\circ\pi = \varphi$. Ainsi φ est un état idempotent de Haar sur $C^*_u(G)$.

⚠ on ne sait pas si cela fonctionne sur la réduite → dans le cas non moyennable.