

Suite

Il restait encore le $\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ à montrer.

Supposons que G_0 soit un sous-groupe non distingué de G : il existe $s \in G_0$ et $g \in G$

tel que $gsg^{-1} \notin G_0$. Alors $\varphi((\lambda_e - \lambda_s)^*(\lambda_e - \lambda_s)) = \varphi(\lambda_e - \lambda_s - \lambda_{s^{-1}} + \lambda_e)$
 $= \varphi(\lambda_e) - \varphi(\lambda_s) - \varphi(\lambda_{s^{-1}}) + \varphi(\lambda_e)$
 $= 1 - 1 - 1 + 1 = 0: \lambda_e - \lambda_s \in N_p.$

Si on considère le produit $\lambda_g(\lambda_e - \lambda_s) = \lambda_g - \lambda_{gs}$, on a

$$\varphi((\lambda_g(\lambda_e - \lambda_s))^*(\lambda_g(\lambda_e - \lambda_s))) = \varphi((\lambda_{g^{-1}} - \lambda_{s^{-1}g^{-1}})(\lambda_g - \lambda_{gs})) = \varphi(\lambda_e - \lambda_s - \lambda_{s^{-1}} + \lambda_e)$$

$$= \varphi(\lambda_e) - \varphi(\lambda_s) - \varphi(\lambda_{s^{-1}}) + \varphi(\lambda_e) = 0 \text{ et } \lambda_g(\lambda_e - \lambda_s) \in N_p$$

Par contre, si on considère l'autre produit: $(\lambda_e - \lambda_s) \cdot \lambda_g = \lambda_g - \lambda_{sg}$, on a

$$\varphi((\lambda_g - \lambda_s)\lambda_g)^*(\lambda_g - \lambda_s)\lambda_g = \varphi((\lambda_{g^{-1}} - \lambda_{s^{-1}g^{-1}})(\lambda_g - \lambda_{sg})) = \varphi(\lambda_e - \lambda_{g^{-1}sg} - \lambda_{g^{-1}s} + \lambda_e)$$

$$= \varphi(\lambda_e) - \varphi(\lambda_{g^{-1}sg}) - \varphi(\lambda_{g^{-1}s}) + \varphi(\lambda_e) = 2 \neq 0$$

Donc N_p n'est pas un idéal bilatère et φ n'est pas un idempotent de $\frac{\mathbb{C}[G]}{N_p}$.

Caractérisation de états idempotents sur les groupes quantiques finis.

d'après A new characterisation of idempotent states on finite and CQG's, Franz Schleich.

Définition 1 Soit A une C^* -algèbre. A est de dimension finie si l'e.v. sous-jacent est de dimension finie. Si (A, Δ) est un CQG, on dit que (A, Δ) est fini si A est de dimension finie.

Définition 2 Définissons $V: A \otimes A \rightarrow A \otimes A$
 $a \otimes b \mapsto \Delta(a)(1_A \otimes b)$ et posons $H_2 = \overline{\sum_{a,b} a \otimes b}$
 où $N_2 = \{a \in A: h(a^*a) = 0\}$. Alors V s'étend en un opérateur unitaire V sur H_2 tel que $V_{12}V_{13}V_{23} = V_{23}V_{12}$ sur $H_2 \otimes H_2 \otimes H_2$, avec la notation $V_{12} = V \otimes id$, etc.

V est appelé l'unitaire multiplicatif de (A, Δ) . Un présous-groupe de

Définition 3 Soit (A, Δ) CQG fini, d'unitaire multiplicatif V . Un présous-groupe de (A, Δ) est un vecteur unité $f \in H_2$ tel que $\varepsilon(f) > 0$ et $V(f \otimes f) = f \otimes f$, où $\varepsilon: A \rightarrow \mathbb{C}$ est la counité. C'est un sous-groupe si $f \in Z(A)$: $\forall a \in A$ $af = fa$.

Définition 4: Une sous-algèbre coidéale à droite C dans un GQC (A, Δ) est une $\ast$ -sous-algèbre unifiée $C \subseteq A$ telle que $\Delta(C) \subseteq A \otimes C$. (2)

Exemple: Soit (A, Δ_A) un GQC et (B, Δ_B) un sous-groupe quantique de (A, Δ_A) . Alors $A \# B = \{ a \in A : \pi(\otimes \text{id}) \circ \Delta(a) = 1_B \otimes a \}$ définit une sous-algèbre coidéale à droite de A .

Définition 5: Une sous-algèbre coidéale à droite de cette forme est dite de type quotient.

Lemme 1: Soit (A, Δ) un GQC avec deux états f et g tels que $f \star g = g \star f = f$.

Soit $g_\#$ la fonctionnelle définie par $g_\#(a) = g(ab)$ pour $a, b \in A$.

Alors $f \star g_\# = g(b)f$ pour $b \in A$.

Si $u, v \in H_h$, on note $\omega_{u,v} : A \rightarrow \mathbb{C}$ la fonctionnelle linéaire telle que :

$$\forall a \in A, \omega_{u,v}(a) = \langle u, av \rangle = h(u^\ast av).$$

Théorème: Soit (A, Δ) un GQC fini. Alors l'application $f \mapsto \omega_{f,f}$ définit une bijection entre pré-sous-groupes et états idempotents de (A, Δ) .

Démonstration. Soit $\omega_{f,f}$ l'état associé au pré-sous-groupe et $f \in A$.

Pour tout $a \in A$ on a $\omega_{f,f}(a) = \langle f, af \rangle = h(f^\ast af)$

$\omega_{f,f}$ est un état car h l'est. Montrons que $\omega_{f,f}$ est idempotent.

$$\begin{aligned} (\omega_{f,f} \star \omega_{f,f})(a) &= (\omega_{f,f} \otimes \omega_{f,f}) \circ \Delta(a) = \langle f \otimes f, \Delta(a) f \otimes f \rangle \\ &= \langle V f \otimes f, \Delta(a) V f \otimes f \rangle = \langle f \otimes f, V^\ast \Delta(a) V f \otimes f \rangle. \end{aligned}$$

Or l'unicité multiplicatif permet aussi d'implémenter le coproduit

$$\text{Or } \underbrace{V^\ast \Delta(a) V}_{a \otimes 1} b \otimes c = V^\ast \Delta(a) \Delta(b)(1 \otimes c) = \underbrace{V^\ast \Delta(ab) 1}_{V(ab \otimes c)} = (a \otimes 1)(b \otimes c).$$

$$= \langle f \otimes f, (a \otimes 1) f \otimes f \rangle = \langle f, af \rangle \underbrace{\langle f, f \rangle}_{\substack{\text{"} \neq 1 \text{"} \\ = 1}} = \langle f, af \rangle = \omega_{f,f}(a).$$

Donc $\omega_{f,f}$ est un idempotent!

Réciproq³, soit $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}$ un état idempotent. Comme l'état de Haar est tracial, il existe un unique élément positif $p \in A$ tel que $\varphi(a) = \langle p, a \rangle$.

On pose $f_\varphi = \sqrt{p}$; c'est bien le pré-sous-groupe qu'on cherche. De plus, f_φ est unique.

Définition: Un élément non nul $p \in A$ dans un QCC (A, Δ) est une projection groupale si ① $p^2 = p = p^*$ et ② $\Delta(p)(1 \otimes p) = p \otimes p$.

N.B.: Soit (A, Δ) un QCC fini. L'application $f \mapsto \frac{f}{\varepsilon(f)}$ définit une bijection entre pré-sous-groupes et projections groupales de (A, Δ) .

Dém.: Si f est un pré-sous-groupe, $\frac{f}{\varepsilon(f)}$ est une projection groupale:

d'après la dém. du théorème, $\frac{f}{\varepsilon(f)}$ est un élément idempotent de norme 1, de sorte que c'est une projection orthogonale. De plus, $\Delta\left(\frac{f}{\varepsilon(f)}\right)(1 \otimes \frac{f}{\varepsilon(f)}) = \frac{1}{\varepsilon(f)^2} \Delta(f)(1 \otimes f) = \frac{1}{\varepsilon(f)^2} V(f \otimes f) = \frac{f \otimes f}{\varepsilon(f)f} = \frac{f}{\varepsilon(f)} \otimes \frac{f}{\varepsilon(f)}$

La bijectivité de $f \mapsto \frac{f}{\varepsilon(f)}$ découle de la bijection $f \mapsto \omega f$.

Corollaire: Soit (A, Δ) un QCC. Le treillis des états idempotents sur (A, Δ) et le treillis des sous-algèbres co-idéales à droite sont isomorphes.

Ref.: Unitaires multiplicatifs en dimension finie et leurs sous-objets Baaj, Blanchard, Skandalis

Rém.: D'après le théorème, les états idempotents de (A, Δ) sont isomorphes aux pré-sous-groupes de (A, Δ) et d'après [Baaj, Blanchard, Skandalis, proposition 4.3], les pré-sous-groupes sont isomorphes aux sous-algèbres co-idéales à droite, d'où le résultat.

Remarque: on pose $g \leq f \Leftrightarrow V(f \otimes g) = f \otimes g$. (ordre des pré-sous-groupes)
 $\varphi_1 \leq \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1 \star \varphi_2 = \varphi_2$ (ordre des états idempotents)

Lemme 2 Soit (A, Δ) un QCC fini et f un sous-groupe de (A, Δ) .
 Posons $\tilde{f} = \frac{f}{\varepsilon(f)}: A_f = A\tilde{f} = \{a\tilde{f}: a \in A\}$ et $\Delta\tilde{f}: \begin{cases} A_f \rightarrow A_f \otimes A_f \\ a \mapsto \Delta(a)(\tilde{f} \otimes \tilde{f}) \end{cases}$
 (A_f, Δ_f) est un sous-groupe quantique de (A, Δ) .

Réf: ② Compact and discrete subgroups of algebraic qg^s (Landsberg & Van Daele)

Dém: D'après la proposition 2.1 de ②, (A_f, Δ_f) est un GQC.

Soit $\pi_f: \begin{cases} A \rightarrow A_f \\ a \mapsto a_f = \frac{a_f}{\varepsilon(f)} \end{cases}$: π_f est un $\ast$ -homomorphisme unifié surjectif.

$$\begin{aligned} \text{Nous avons de plus que } \Delta_f \circ \pi_f &= (\pi_f \otimes \pi_f) \circ \Delta : (\pi_f \otimes \pi_f) \circ \Delta(a) = \pi_f \otimes \pi_f (q_{(1)} \otimes q_{(2)}) \\ &= \pi_f(q_{(1)}) \otimes \pi_f(q_{(2)}) \\ &= q_{(1)f} \otimes q_{(2)f} \\ &= \frac{\Delta(a)(f \otimes f)}{\varepsilon(f)} \\ &= \Delta(a)(\tilde{f} \otimes \tilde{f}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots &= \Delta(a) \Delta(\tilde{f})(1 \otimes \tilde{f}) = \Delta(a\tilde{f})(1 \otimes \tilde{f}) = \Delta(a\tilde{f})(\tilde{f} \otimes \tilde{f}) \\ &= \Delta_f(a\tilde{f}) = \Delta_f \circ \pi_f(a). \end{aligned}$$

Donc (A_f, Δ_f) est bien un sous-groupe quantique de (A, Δ) .

Proposition: Soit φ un état, Δ copolym. Alors

① φ est un état, Δ copolym de Haas

② $f_\varphi = \sqrt{P_\varphi} = \frac{P_\varphi}{\sqrt{\varepsilon(P_\varphi)}}$ est un sous-groupe

③ $C_\varphi = (\text{id}_\pi \otimes \varphi) \circ \Delta(A)$ est une sous-algèbre constante à droite de type quotient.