Produits d'espaces de probabilité quantiques.

Idée : cela donne une notion d'indépendance quantique.

intérêt : analogue de processus stationnaires et d'accroissements

Il y a une seule indépendance commutative
et cinq indépendances non commutatives !

Indépendance au sens physique : le produit tensoriel $(H_1 \otimes H_2, \rho_1 \otimes \rho_2)$

Idée : si X_1, X_2 sont des v.a définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs $(E_1, \mathcal{E}_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2)$ resp.

Alors X_1 et X_2 sont indépendants si $\forall A_1 \in \mathcal{E}_1 \, \forall A_2 \in \mathcal{E}_2 \; P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = P(X_1 \in A_1) P(X_2 \in A_2)$.

on peut écrire cela $P_{(X_1, X_2)} = P_{X_1} \otimes P_{X_2}$ où $P_{X_i}(A) = P(X_i \in A) = P(X_i^{-1}(A))$
$= (X_i)_* (P)$.

<u>N.B.</u> : Un opérateur normal $X \in B(H)$ peut être considéré comme fonction

<u>Def</u> : Soit $(\mathcal{A}, \Phi)$ un espace de probabilités quantiques, $\mathcal{B}$ une algèbre ...

Alors une <u>v.a.q.</u> à valeurs dans $\mathcal{B}$ est un $*$-homomorphisme

$j : \mathcal{B} \longrightarrow (\mathcal{A}, \Phi)$.

<u>Ex</u> : Si $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (E, \mathcal{E})$ est une v.a. (classique), alors

$j_X : L^\infty(E, \mathcal{E}) \longrightarrow L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$

avec P_X cela va certainement marcher..

<u>N.B.</u> : il y a aussi des variantes C^*-algébriques, $*$-algébriques, algébriques

<u>Ex</u> : Si $X \in B(H)$ est normal, on a un calcul fonctionnel $j_X : L^\infty(\sigma(X)) \to B(H)$

A est ici une $*$-algèbre unifère et $\Phi : A \to \mathbb{C}$ est $f \mapsto f(X)$

linéaire telle que $\Phi(1) = 1$ et $\Phi(a^* a) \geq 0$ pour $a \in A$.

Quels sont les produits $(A, \Phi), (B, \psi) \longrightarrow (C, \tau)$ raisonnables ?

<u>Rappels sur les produits en théorie des catégories</u> : si $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, alors

$$\begin{tikzcd} A & A \times B \arrow[l, "i_A"'] \arrow[r, "i_B"] & B \\ & D \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "\exists !"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$A \times B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$

$(A \times B, \; i_A : A \times B \to A, (a,b) \mapsto a, \; i_B : A \times B \to B, (a,b) \mapsto b)$ est un produit de A et B si pour tous $f : D \to A$, $g : D \to B$ morphisme dans $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$, il existe un unique morphisme h tel que le diagramme commute : $h(d) = (f(d), g(D))$

(On aurait mieux fait d'utiliser la lettre π quoi !)

Au niveau du coproduit $A \amalg B$: $i_A : A \longrightarrow A \amalg B$, $i_B : A \longrightarrow A \amalg B$ est un coproduit si $\forall D \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ $\forall f : A \longrightarrow D$ $\forall g : B \longrightarrow D$ $\exists!\, h : A \amalg B \longrightarrow D$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \amalg B \arrow[d, dashed, "\exists! h"] & B \arrow[l, "i_B"'] \arrow[dl, "g"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

commute : $h \circ i_A = f$
$h \circ i_B = g$.

Ex : pour les ensembles, le produit cartésien est le produit
l'Union disjointe est le coproduit

Étant donnés $j_1 : B_1 \longrightarrow (A, \phi)$
$j_2 : B_2 \longrightarrow (A, \phi)$ (on appelle $\phi \circ j_i : B_i \longrightarrow \mathbb{C}$ la loi de j_i)

il existe un unique homomorphisme
$j : B_1 \amalg B_2 \longrightarrow (A, \phi)$ et on appelle $\phi \circ j : B_1 \amalg B_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ la loi jointe du couple (j_1, j_2). Dans la catégorie des algèbres unifères et commutatives on a $B_1 \amalg B_2 = B_1 \otimes B_2$ et $i_1 : b \longmapsto b \otimes 1$, $b \in B_1$
$i_2 : b \longmapsto 1 \otimes b$, $b \in B_2$.

- Dans la catégorie des algèbres unifères, $B_1 \amalg B_2$ est le produit libre de B_1 et B_2.
- Dans la catégorie des algèbres unifères, on pose $B_i = \mathbb{C}1 \oplus \mathring{B}_i$ et $B_1 \amalg B_2$, le produit libre de B_1 et B_2, sera $\mathbb{C}1 \oplus \bigoplus_{\varepsilon \in A_{(1,2)}} B_\varepsilon$, où
$A_{(1,2)} = \{ \varepsilon \in \{1,2\}^n : n \geq 1,\ \varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1} \text{ pour } i \in \{1, \dots, n-1\} \}$ et $B_\varepsilon = \mathring{B}_{\varepsilon_1} \otimes \dots \otimes \mathring{B}_{\varepsilon_n}$
et si $a \in B_\varepsilon$, $b \in B_\delta$, $a \cdot b = (a_{\varepsilon_1} \otimes \dots \otimes a_{\varepsilon_n}) \cdot (b_{\delta_1} \otimes \dots \otimes b_{\delta_m}) = \begin{cases} a_{\varepsilon_1} \otimes \dots \otimes a_{\varepsilon_n} \otimes b_{\delta_1} \otimes \dots \otimes b_{\delta_m} & \text{si } \varepsilon_n \neq \delta_1 \\ a_{\varepsilon_1} \otimes \dots \otimes a_{\varepsilon_{n-1}} \otimes c \otimes b_{\delta_2} \otimes \dots \otimes b_{\delta_m} + \lambda \cdot a_{\varepsilon_1} \otimes \dots \otimes a_{\varepsilon_{n-1}} \cdot b_{\delta_2} \otimes \dots \otimes b_{\delta_m} & \end{cases}$

où $a_{\varepsilon_n} \cdot b_{\delta_1} = \lambda 1 + \underset{\mathring{B}_{\varepsilon_n}}{c}$

(définition par récurrence)

On a un produit d'espaces de probabilité non commutatives.

$$((A, \phi), (B, \psi)) \longmapsto (A \amalg B, \phi \cdot \psi)$$

cf. travaux de Schürmann, Speicher, Ben Ghorbal, Muraki

Les premiers ont supposé que $\phi \cdot \psi \cong \psi \cdot \phi$ et que $A \amalg B \cong B \amalg A$
Muraki a étudié le cas "vraiment non commutatif".